ТЕОРЕМА 2. Допустимая почти эрмитова структура $(J,\tilde{g})$ является келеровой тогда и только тогда, когда $R^c_{ba}=0$ и $B_{abc}=\tilde{g}_{ad}B^d_{bc}$ симметричен по всем индексам.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Галаев С. В., Чельшев В. Т.* О допустимых тензорных структурах на неголономном многообразии // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 19 – 21.

2. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М.: Наука, 1981.

3. *Манин Ю. И.* Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.: Наука, 1984.

4. *Вагнер В. В.* Геометрия (n-1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173 – 225.

5. *Яно К., Кон М.* CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях. М.: Наука, 1990.

УДК 517.984

С. А. Бутерин

ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА СВЁРТКИ ПО СПЕКТРУ ЕГО НЕГЛАДКОГО ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ *

Зафиксируем $n\ge 1$. Пусть Λ – совокупность всех характеристических чисел λ_k интегрального оператора $A=A(M,g,v)$ вида

$$Af=Mf+g(x)\int_0^T f(t)v(t)dt,\quad Mf=\int_0^x M(x-t)f(t)dt,\quad 0\le x\le T,\qquad (1)$$

где $M(x)\in W_2^{n+1}[0,T]$, $M^{(j)}(0)=\delta_{j,n-1}$, $j=\overline{0,n}$, $\delta_{j,n-1}$ – символ Кронекера, $g(x), v(x)\in L_2(0,T)$. Пусть также существуют a, b, $0\le a<b\le T$, такие, что

$$\int_a^{a+\varepsilon}|g(x)|dx>0,\quad \int_{b-\varepsilon}^{b}|v(x)|dx>0\qquad (2)$$

для любого $\varepsilon>0$. Будем рассматривать следующую обратную задачу.

ЗАДАЧА 1. По характеристическим числам Λ оператора A вида (1) найти функцию $M(x)$ в предположении, что функции $g(x)$, $v(x)$ известны априори.

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376), РФФИ (проект 04-01-00007) и гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

Для случая $g(x)$, $v(x) \in W_2^1[0,T]$, $g(0)v(\pi) \neq 0$ в [1] доказана единственность решения задачи 1, а в [2] получены условия, необходимые и достаточные для ее разрешимости. В [1, 2] обратная задача сводится к так называемому основному нелинейному интегральному уравнению, для вывода которого требуется гладкость функций $g(x), v(x)$. В настоящей работе доказывается единственность решения задачи 1 при более слабых и в определенном смысле минимальных требованиях на функции $g(x), v(x)$. Для этого используется иная идея, основанная на применении теоремы Е. Титчмарша о свёртке [3].

Наряду с оператором A будем рассматривать оператор $\widetilde{A} = A(\widetilde{M}, g, v)$ с теми же функциями $g(x), v(x)$. Условимся, что если некоторый символ α обозначает объект, относящийся к оператору A, то символ $\widetilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, соответствующий оператору $\widetilde{A}$, и $\hat{\alpha} = \alpha - \widetilde{\alpha}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $\Lambda = \widetilde{\Lambda}$, то $M(x) = \widetilde{M}(x)$ на $[0, b-a]$. В частности, если $a = 0$, $b = T$, то задание Λ однозначно определяет оператор $A(M, g, v)$ в предположении, что функции $g(x), v(x)$ известны априори.

Замечание 1. В теореме 1 не исключен случай $\Lambda = \varnothing$.

Характеристические числа λ_k оператора A вида (1) совпадают с нулями его характеристической функции:

$$L(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^T v(x) g(x,\lambda)\,dx, \text{ где } g(x,\lambda) = (E - \lambda M)^{-1} g, \tag{3}$$

E – тождественный оператор. Согласно теореме Л.А. Сахновича об извлечении корня из оператора [4, 5], существует функция $M_1(x) \in W_2^2[0,T]$, $M_1(0) = 1$, $M_1'(0) = 0$, такая, что $M = M_1^n$, где $M_1 f = \int_0^x M_1(x-t) f(t)\,dt$. Обозначим $M_1(x-t,\lambda)$ – ядро оператора $R_\lambda(M_1) = (E - \lambda M_1)^{-1} M_1$, тогда имеем

$$M_1(x,\lambda) = \exp(\lambda x) + \int_0^x K(x,t) \exp(\lambda t)\,dt \tag{4}$$

с некоторой суммируемой с квадратом функцией $K(x,t)$ [4]. Положим

$$\mu_0(x) = \int_x^T v(t) g(t-x)\,dt, \quad \mu(x) = \mu_0(x) + \int_x^T K(t,x) \mu_0(t)\,dt.$$

Пусть $L_1(\lambda)$ – характеристическая функция оператора $A_1 = A(M_1, g, v)$.

ЛЕММА 1. Имеют место формулы:

$$L_1(\lambda) = 1 - \mu_0(0)\lambda - \lambda^2 \int_0^T \mu(x) \exp(\lambda x)\,dx, \tag{5}$$

$$L(\lambda)=1-\mu_0(0)\lambda-\frac{\rho^{n+1}}{n}\int_0^T\mu(x)\sum_{j=1}^{n}\exp(\rho R_j x)dx, \tag{6}$$

где $\rho^n=\lambda$, $R_j^n=1$, $R_j\neq R_k$ при $j\neq k$.

ЛЕММА 2. Справедливо представление

$$L(\lambda)=\exp(-\delta_{1,n}\mu_0(0)\lambda)\prod_k\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)\exp\left(\delta_{1,n}\frac{\lambda}{\lambda_k}\right). \tag{7}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть сначала $n=1$. Тогда $M=M_1$. Так как $(E-\lambda M_1)^{-1}=E+\lambda R_\lambda(M_1)$, то в силу (3) имеем

$$\hat{L}(\lambda)=-\lambda^2\left\langle v,\hat{M}_1 g\right\rangle-\lambda^3\left\langle v,\left(M_1R_\lambda(M_1)-\widetilde{M}_1R_\lambda\left(\widetilde{M}_1\right)\right)g\right\rangle, \tag{8}$$

где $\langle f_1,f_2\rangle=\int_0^T f_1(x)f_2(x)dx$. Поскольку $M_1R_\lambda(M_1)-\widetilde{M}_1R_\lambda\left(\widetilde{M}_1\right)=\hat{M}_1G_\lambda$, где $G_\lambda=R_\lambda(M_1)+R_\lambda\left(\widetilde{M}_1\right)+\lambda R_\lambda(M_1)R_\lambda\left(\widetilde{M}_1\right)$, то (8) примет вид

$$\hat{L}(\lambda)=-\lambda^2\left\langle v,\hat{M}_1 g\right\rangle-\lambda^3\left\langle v,\hat{M}_1G_\lambda g\right\rangle. \tag{9}$$

Обозначим $G(x-t,\lambda)$ – ядро оператора G_λ. Тогда

$$\left\langle v,\hat{M}_1G_\lambda g\right\rangle=\int_0^T N(x)G(x,\lambda)dx,\quad N(x)=\int_x^T v(t)dt\int_x^t\hat{M}_1(t-\tau)g(\tau-x)d\tau. \tag{10}$$

Без ущерба для общности можно считать, что $g(x)=0$ п. в. на $(0,a)$, и $v(x)=0$ п. в. на (b,T). Иначе мы могли бы "подвинуть" точки a, b ближе к 0, T соответственно, отчего утверждение теоремы только усилится. Положим $v_1(x)=v(b-x)$, $x\in(0,b)$, $g_1(x)=g(x+a)$, $x\in(0,T-a)$. Тогда

$$N(b-a-x)=\int_0^x\hat{M}_1(x-t)dt\int_0^t v_1(t-\tau)g_1(\tau)d\tau,\quad x\in[0,b-a]. \tag{11}$$

Так как $G(x,\lambda)=M_1(x,\lambda)+\widetilde{M}_1(x,\lambda)+\lambda\int_0^x M_1(x-t,\lambda)\widetilde{M}_1(t,\lambda)dt$, то формула

$$\left\langle v,\hat{M}_1G_\lambda g\right\rangle=\eta+\lambda\int_0^T\left(xN(x)+\int_x^T V(x,t)N(t)dt\right)\exp(\lambda x)dx \tag{12}$$

следует из (4), (10). Здесь η – const, $Q(x,t)=K(x,t)+\widetilde{K}(x,t)$,

$$V(x,t)=\int_{t-x}^{t}Q(\tau,\tau-t+x)d\tau+\int_0^x d\tau\int_\tau^{t-x+\tau}K(s,\tau)\widetilde{K}(t-s,x-\tau)ds+2+\int_x^t Q(t,\tau)d\tau.$$

В силу (7), (9), (11), (12) из условия теоремы следует

$$\int_0^x\hat{M}_1(x-t)dt\int_0^t v_1(t-\tau)g_1(\tau)d\tau=0,\quad x\in[0,b-a].$$

Тогда с учетом (2) и определения функций $g_1(x)$, $v_1(x)$ теорема Е. Титчмарша о свёртке дает $\hat{M}_1(x)=0$ при $x\in[0,b-a]$. Пусть теперь

$n > 1$. Согласно (6), (7) $\mu(x) = \tilde{\mu}(x)$, и в силу (5) $\hat{L}_1(\lambda) \equiv 0$. По первой части доказательства будем иметь $M_1(x) = \tilde{M}_1(x)$ при $x \in [0, b-a]$ и, следовательно, $M(x) = \tilde{M}(x)$ при $x \in [0, b-a]$. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Нетрудно увидеть, что если $g(x) = 0$, $v(x) = 0$ п. в. на $(0, a)$, (b, T) соответственно, то никакая вариация функции $M(x)$ на промежутке $(b-a, T]$ не изменит функцию $L(\lambda)$, а значит, и Λ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутерин С. А.* О единственности восстановления одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 15 – 18.

2. *Бутерин С. А.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 8 – 10.

3. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Гостехиздат, 1951.

4. *Сахнович Л. А.* Спектральный анализ операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)K(x-t)dt$ // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1958. Т. 22. С. 299 – 308.

5. *Юрко В. А.* О порождающих элементах операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)K(x-t)dt$ // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 79 – 102.

УДК 517.51

Р. Р. Васюков

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КАНОНИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

В книге [1] проводится восстановление вероятностной меры в случае 2-периодической последовательности канонических моментов меры на некотором отрезке. В данной статье решена задача восстановления в случае m-периодической последовательности канонических моментов. Пусть

$$c_k = c_k(\mu) = \int_a^b x^k d\mu(x), \; k \geq 1,$$

– последовательность обычных моментов меры μ на отрезке $[a, b]$.
Для меры μ с моментами c_k, $k \geq 1$, положим

$$c_k^- = c_k^-(\mu) = \min_\eta c_k(\eta), \quad c_k^+ = c_k^+(\mu) = \max_\eta c_k(\eta),$$

где минимум и максимум берутся по вероятностным мерам, моменты которых до порядка $k-1$ совпадают с моментами меры μ. Тогда величины