$n > 1$. Согласно (6), (7) $\mu(x) = \tilde{\mu}(x)$, и в силу (5) $\hat{L}_1(\lambda) \equiv 0$. По первой части доказательства будем иметь $M_1(x) = \tilde{M}_1(x)$ при $x \in [0, b-a]$ и, следовательно, $M(x) = \tilde{M}(x)$ при $x \in [0, b-a]$. Теорема 1 доказана.

Замечание 2. Нетрудно увидеть, что если $g(x) = 0$, $v(x) = 0$ п. в. на $(0, a)$, (b, T) соответственно, то никакая вариация функции $M(x)$ на промежутке $(b-a, T]$ не изменит функцию $L(\lambda)$, а значит, и Λ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутерин С. А.* О единственности восстановления одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 15 – 18.

2. *Бутерин С. А.* Необходимые и достаточные условия разрешимости обратной задачи для одномерного возмущения оператора свертки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 8 – 10.

3. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Гостехиздат, 1951.

4. *Сахнович Л. А.* Спектральный анализ операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)K(x-t)dt$ // Изв. АН СССР. Сер. математическая. 1958. Т. 22. С. 299 – 308.

5. *Юрко В. А.* О порождающих элементах операторов вида $Kf = \int_0^x f(t)K(x-t)dt$ // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1973. Вып. 3. С. 79 – 102.

УДК 517.51

Р. Р. Васюков

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ КАНОНИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

В книге [1] проводится восстановление вероятностной меры в случае 2-периодической последовательности канонических моментов меры на некотором отрезке. В данной статье решена задача восстановления в случае m-периодической последовательности канонических моментов. Пусть

$$c_k = c_k(\mu) = \int_a^b x^k d\mu(x), \ k \geq 1,$$

– последовательность обычных моментов меры μ на отрезке $[a, b]$.
Для меры μ с моментами c_k, $k \geq 1$, положим

$$c_k^- = c_k^-(\mu) = \min_\eta c_k(\eta), \quad c_k^+ = c_k^+(\mu) = \max_\eta c_k(\eta),$$

где минимум и максимум берутся по вероятностным мерам, моменты которых до порядка $k-1$ совпадают с моментами меры μ. Тогда величины

$$p_k = \frac{c_k - c_k^-}{c_k^+ - c_k^-}, \quad k \geq 1,$$

называются *каноническими моментами* меры μ.

Основными инструментами для исследования свойств меры являются здесь прямое и обратное преобразования Стилтьеса.

Прямое преобразование Стилтьеса для вероятностной меры на отрезке $[0,1]$ – это аналитическая вне отрезка $[0,1]$ функция:

$$S(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(x)}{z-x} = \frac{1|}{|z} - \frac{p_1|}{|1} - \frac{q_1 p_2|}{|z} - \frac{q_2 p_3|}{|1} - \ldots,$$

где $q_0 = 1,\ q_k = 1 - p_k$.

Можно показать (используя свойства непрерывных дробей), что преобразование Стилтьеса представляется и в другой (более удобной в дальнейшем) форме. А именно

$$S(z) = \int_0^1 \frac{d\mu(x)}{z-x} = \frac{1 \quad |}{|z - \xi_1} - \frac{\xi_1\xi_2 \quad |}{|z - \xi_2 - \xi_3} - \frac{\xi_3\xi_4 \quad |}{|z - \xi_4 - \xi_5} - \ldots,$$

где $\xi_k = q_{k-1} p_k$.

Такой вид функции $S(z)$ выбирается из тех соображений, что он близок к виду непрерывной дроби, рассмотренной в [2].

Свойства преобразования Стилтьеса меры μ, как известно, позволяют найти все компоненты меры. Таким образом, для того чтобы восстановить меру по каноническим моментам, достаточно найти ее преобразование Стилтьеса.

В [2] рассматривается непрерывная дробь следующего вида:

$$K(z) == \frac{\lambda_1 |}{|z - \alpha_1} - \frac{\lambda_2 |}{|z - \alpha_2} - \ldots,$$

где $\{\alpha_k\}_1^\infty,\ \{\lambda_k\}_1^\infty \neq 0$ – произвольные действительные числа.

Последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty,\ \{\lambda_k\}_1^\infty$ берутся *m*-периодическими.

В нашем случае имеем

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{k+1} = \xi_{2k-1}\xi_{2k},\ \alpha_1 = \xi_1,\ \alpha_{k+1} = \xi_{2k} + \xi_{2k+1}.$$

Отсюда следует, что если период последовательности канонических моментов меры четный, то последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty,\ \{\lambda_k\}_1^\infty$ имеют половинный период, в случае нечетного периода последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty,\ \{\lambda_k\}_1^\infty$ имеют тот же период.

Таким образом, пользуясь результатами [2], получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть для некоторой вероятностной меры μ на отрезке $[a,b]$ выполняется условие m-периодичности канонических моментов:

$$p_n = p_k, \; n-s \equiv k(\text{mod } m); \; k=1\ldots m, \; n>s, \; s\geq 0.$$

Тогда мера μ состоит из двух компонент:

$$d\mu(x) = d\mu_1(x) + d\mu_2(x),$$

где мера μ_1 абсолютно непрерывна на множестве E, состоящем из конечного числа отрезков. При этом имеем

$$d\mu_1(x) = p(x)dx, \; p(x) = \frac{\sqrt{4l - \{P_m(x) - R_{m-2}(x)\}^2}}{C(x)},$$

где $P_m(x)$ – ортогональные относительно меры μ многочлены с единичным старшим коэффициентом, многочлен $R_n(x)$ удовлетворяет трехчленному рекуррентному соотношению с коэффициентами рекуррентного соотношения, записанного для многочлена $P_{n+1}(x)$, с начальными условиями:

$$P_{-1}(x)=0, \; P_0(x)=1, \; R_{-1}(x)=1, \; R_0(x)=0.$$

Константа l равна:

$l = \lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_{m/2} = p_1q_1p_2q_2p_3\cdots q_{m-1}p_m$ в случае четного периода,

$l = \lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_m = p_1q_1p_2q_2p_3\cdots q_{2m-2}p_{2m-1}$ в случае нечетного периода.

Множество E – это система отрезков таких, что выполняется неравенство

$$F(x) = 4l - \{P_m(x) - P_{m-2}(x)\}^2 > 0.$$

Многочлен $C(x)$ имеет вид

$$C(x) = P_{m+1-s}(x)P_s(x) - P_{m+s}(x)P_{s-1}(x).$$

Вторая компонента μ_2 имеет финитный (т.е. содержащий конечное число точек) носитель; причем он состоит из тех корней x_ν многочлена $C(x)$, для которых выполняется неравенство

$$|P_{k+m}(x_\nu)| < \sqrt{l}\,|P_k(x_\nu)|, \; \forall k \geq s-1;$$

массы точек x_ν равны $\mu_\nu = 2\lim\limits_{x\to x_\nu} |p(x)(x-x_\nu)|$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Dette H., Studden W.* The Theory of Canonical Moments with Applications in Statistics, Probability, and Analysis. N. Y., 1997. 324 p.

2. *Геронимус Я. Л.* О некоторых уравнениях в конечных разностях и соответствующих системах ортогональных многочленов // Зап. НИИ математики и механики и Харьк. мат. о-ва. Харьков, 1938. Т. 15, вып. 2. С. 57 – 64.