УДК 517.51

С. С. Волосивец, Н. Ю. Агафонова

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ ОРЛИЧА*

Пусть $\boldsymbol{P}=\left\{p_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность натуральных чисел таких, что $2\le p_j\le N$ при всех $j\in\mathbb{N}$, $m_0=1$, $m_n=p_1\dots p_n$ при $n\in\mathbb{N}$. Каждое $x\in[0,1)$ имеет разложение $x=\sum_{j=1}^{\infty}x_jm_j^{-1}$, где $x_j\in\mathbb{Z}$, $0\le x_j<p_j$ (для $x=k/m_n$ берем разложение с бесконечным числом $x_j\ne 0$). Если $k\in\mathbb{Z}_+$ записано в виде

$$k=\sum_{j=1}^{\infty}k_jm_{j-1},\ 0\le k_j<p_j,$$

то по определению полагаем для $x\in[0,1)$

$$\chi_k(x)=\exp(2\pi i\sum_{j=1}^{\infty}x_jk_j/p_j).$$

Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – ортонормированная, полная в $L[0,1)$ система [1, §1.5]. По определению $\hat{f}(k)=\int_0^1 f(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt$, а $S_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n-1}\hat{f}(x)\chi_k(x)$. Особенно хорошими аппроксимативными свойствами обладает сумма $S_{m_n}(f,x)$, которая активно используется в данной статье.

Пусть $\Phi(u)$ – непрерывная на $[0,+\infty)$, выпуклая функция такая, что $\lim\limits_{u\to 0+0}\Phi(u)/u=0$, $\lim\limits_{u\to\infty}\Phi(u)/u=+\infty$. Пусть $\Psi(u)$ – сопряженная к $\Phi(u)$ по Юнгу функция. Пространством $L_{\Phi}^{*}[0,1)$ назовем множество измеримых на $[0,1)$ функций $f(x)$ таких, что для любой функции $g(x)$ со свойством $\int_0^1\Psi(|g(x)|)dx\le\infty$ интеграл $\int_0^1 f(x)g(x)dx$ конечен. Нормой в этом пространстве является

$$\|f\|_{\Phi}=\sup\left\{\left|\int_0^1 f(x)g(x)\,dx\right|:\int_0^1\Psi(|g(x)|)dx\le 1\right\}.$$

По поводу этих определений см. [2].

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00390), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.374).

Пусть X и Y – два функциональных пространства на $[0,1)$.

Если последовательность $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ такова, что для любой $f \in X$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \hat{f}(n) \chi_n(x)$ является рядом Фурье (по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$) функции $g \in Y$, то по определению $\{\lambda_n\} \in (X, Y)$.

Пусть $B[0,1)$ – пространство ограниченных на $[0,1)$ функций.

ТЕОРЕМА 1. Условие $\{\lambda_k\} \in (L_{\Phi}^{*}, B)$ равносильно существованию $g \in L_{\Psi}^{*}[0,1)$ такой, что $\hat{g}(k) = \lambda_k$.

Введем теперь класс $V(1,\Phi)$ функций $\varphi \in L_{\Phi}^{*}[0,1)$ таких, что для некоторой константы $C > 0$ и любого конечного набора попарно непересекающихся интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{n} \subset [0,1)$ верно неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} (f(\beta_i \Theta t) - f(\alpha_i \Theta t)) \right\|_{\Phi} \le C.$$

Здесь Θ – ***P***-ичная разность чисел из $[0,1)$ [1, §1.5].

Пусть $V[0,1)$ – пространство функций ограниченной вариации на $[0,1)$.

ТЕОРЕМА 2. Последовательность $\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$ принадлежит классу (L_{Φ}^{*}, V) тогда и только тогда, когда существует $\varphi \in V(1,\Phi)$ такая, что $\lambda_k = \hat{\varphi}(k)$.

ТЕОРЕМА 3. Условие $\{\lambda_k\} \in (L, L_{\Phi}^{*})$ равносильно существованию $\varphi \in L_{\Phi}^{*}[0,1)$ такой, что $\hat{\varphi}(k) = \lambda_k$.

В тригонометрическом случае аналогичные результаты были получены в [3].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.

3. *Скворцова М. Г.* Свойства мультипликаторов тригонометрических рядов Фурье // Мат. зап. Уральск. ун-та. 1972. Т. 8, тетр. 2. С. 91 – 107.