БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Eisenhart L. P., Veblen D.* The Riemannian geometry and its generalization // Proc. Nat. Acad. Sc. 1922. Vol. 8. P. 19 – 23.

2. *Golab S.* Über die Metrisierbarkeit der Affinzusammenhängenden Räume // Tensor. 1959. Vol. 9. P. 1 – 7.

3. *Галаев С. В., Гохман А. В.* К геометрии динамики со связями одного класса точек переменной массы // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 18 – 22.

4. *Вагнер В. В.* Геометрия (n-1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173 – 225.

5. *Галаев С. В., Гохман А. В.* О метризуемости аффинной связности в неголономном многообразии X_3^2 // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 34 – 37.

УДК 517.984

О. Б. Горбунов

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПУЧКОВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА*

Рассмотрим краевую задачу $L = L(p_1(x), p_2(x), \nu_1, \nu_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2)$ вида

$$y''(x) + \left(\rho^2 + \rho\left(\frac{\nu_1}{x-\gamma} + p_1(x)\right) + \frac{\nu_2}{(x-\gamma)^2} + p_2(x)\right)y(x) = 0, \; x \in (0,\pi), \quad (1)$$

$$\begin{aligned} U(y) &:= y'(0) - (\alpha_1\rho + \alpha_2)y(0) = 0, \\ V(y) &:= y'(\pi) + (\beta_1\rho + \beta_2)y(\pi) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\gamma \in (0,\pi)$, $p_k(x)$ – комплекснозначные функции, ν_k – комплексные числа. Пусть для определенности $\operatorname{Re}\nu > 0, 2\nu \notin \mathbb{N}$, где $\nu^2 = 1/4 - \nu_2$, и пусть $|x-\gamma|^{\min\{0,1-2\operatorname{Re}\nu\}} |p_k(x)| \in L(0,\pi)$, $p_1(x) \in W_1^1(0,\pi)$, $k = 1,2$, $|\operatorname{Im}\nu_1| < 1$.

Пучки дифференциальных операторов без особенности изучены достаточно полно [1 – 3]. В данной статье производится постановка обратной спектральной задачи по функции Вейля и доказывается теорема единственности решения поставленной задачи. Эти результаты являются обобщением [3].

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376), РФФИ (проект 04-01-00007), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

При изучении дифференциальных операторов с неинтегрируемыми особенностями важную роль играет исследование фундаментальной системы решений (ФСР) для склейки в особой точке. В [4] построена и изучена ФСР $\{S_1(x,\rho), S_2(x,\rho)\}$ со степенной особенностью в точке: $S_j(x,\rho) = c_j^0 (x-\gamma)^{\mu_j}$, $\mu_j = 0.5 + (-1)^j \nu$, $j = 1,2$. При $|(x-\gamma)\rho| \geq 1$ $S_j^{(m)}(x,\rho) =$

$$= \beta_j^0 \rho^{-\mu_j} e^{2i\pi\mu_j l_1} \Big(\Gamma(\mu_j - i\nu_1/2) e^{\pi\nu_1(k_1+k_2)/2} (i\rho)^m (2(x-\gamma)\rho)^{i\nu_1/2} e^{i\rho(x-\gamma)+iq_1(x)} [1]_\gamma +$$
$$+ \Gamma(\mu_j + i\nu_1/2) e^{i\pi\mu_j l_2} e^{-\pi\nu_1(k_1+k_2)/2} (-i\rho)^m (2(x-\gamma)\rho)^{-i\nu_1/2} e^{-i\rho(x-\gamma)-iq_1(x)} [1]_\gamma \Big),$$

где $[1]_\gamma = \left(1 + O(|(x-\gamma)\rho|^{-1})\right)$, $|\rho| \to \infty$ равномерно по x, $q_1(x) = \int_\gamma^x p_1(t)\,dt/2$,

$$l_1 = \begin{cases} 1, & \rho \in \Pi_1, x < \gamma, \\ -1, & \rho \in \Pi_{-1}, x > \gamma, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \qquad l_2 = \begin{cases} -1, & (x-\gamma)\rho \in \Pi_0, \\ 1, & (x-\gamma)\rho \in \Pi_{-1} \cup \Pi_1, \end{cases} \qquad k_1 = \begin{cases} 0, & x > \gamma, \\ 1, & x < \gamma, \end{cases}$$

$$\Pi_k = \left\{ z : \arg z \in \left(\pi(5k-3)/(6-2k), \pi(5k+3)/(6+2k) \right] \right\}, \; k = 0, \pm 1,$$

$$k_2 = \{ j \mid \rho \in \Pi_j \}, \;\; \beta_1^0 \beta_2^0 = -\frac{e^{\pi\nu_1/2}}{2\pi i \sin 2\pi\nu} \cos\left(\pi\nu - \frac{i\pi\nu_1}{2} \right) \cos\left(\pi\nu + \frac{i\pi\nu_1}{2} \right).$$

Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\varphi_1(x,\rho) = S_1(x,\rho) S_2'(0,\rho) - S_1'(0,\rho) S_2(x,\rho),$$
$$\varphi_2(x,\rho) = S_1(0,\rho) S_2(x,\rho) - S_1(x,\rho) S_2(0,\rho),$$
$$\Phi_2(x,\rho) = \varphi_1(x,\rho) + (\alpha_1\rho + \alpha_2)\varphi_2(x,\rho),$$
$$\Delta(\rho) = V(\Phi_2),$$
$$\Phi_1(x,\rho) = (\Delta(\rho))^{-1} \big(S_1(x,\rho) S_2'(\pi,\rho) - S_1'(\pi,\rho) S_2(x,\rho) -$$
$$- (\beta_1\rho + \beta_2)\left(S_1(\pi,\rho) S_2(x,\rho) - S_1(x,\rho) S_2(\pi,\rho) \right) \big),$$
$$M(\rho) = \Phi_1(0,\rho).$$

Из построения следует:

$$\varphi_1(0,\rho) = 1, \varphi_1'(0,\rho) = 0, \quad \varphi_2(0,\rho) = 0, \varphi_2'(0,\rho) = 1,$$
$$U(\Phi_2) = 0, \quad U(\Phi_1) = 1, V(\Phi_1) = 0,$$
$$\Phi_1(x,\rho) = \varphi_2(x,\rho) + M(\rho)\Phi_2(x,\rho). \tag{3}$$

Функция $\Delta(\rho)$ называется характеристической функцией задачи L, ее нули совпадают с собственными значениями L, $M(\rho)$ называется функцией Вейля задачи L.

Обратная задача. По функции Вейля $M(\rho)$ найти коэффициенты пучка (1), (2).

Условимся, что наряду с задачей L будем рассматривать задачу $\widetilde{L} = L(\widetilde{p}_1(x), \widetilde{p}_2(x), \widetilde{\nu}_1, \widetilde{\nu}_2, \widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2)$. Если некоторый символ a обозначает объект, относящийся к задаче L, то $\widetilde{a}$ – аналогичный объект задачи $\widetilde{L}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $M(\rho)\equiv\widetilde{M}(\rho)$, то $L=\widetilde{L}$.

Доказательство. Введем в рассмотрение следующие функции: $P_j(x,\rho)=\Phi_2(x,\rho)\widetilde{\Phi}_1^{(j-1)}(x,\rho)-\widetilde{\Phi}_2^{(j-1)}(x,\rho)\Phi_1(x,\rho), j=1,2$. Воспользуемся (3), будем иметь $P_j(x,\rho)=\Phi_2(x,\rho)\widetilde{\varphi}_2^{(j-1)}(x,\rho)-\widetilde{\Phi}_2^{(j-1)}(x,\rho)\varphi_2(x,\rho)+ +\left(\widetilde{M}(\rho)-M(\rho)\right)\widetilde{\Phi}_2^{(j-1)}(x,\rho)\Phi_2(x,\rho)$, следовательно, в условиях теоремы $P_j(x,\rho)$ будут целыми по ρ при фиксированном $x\neq\gamma$.

Далее, используя асимптотику специальной ФСР, можно получить $M(\rho)=-\dfrac{1}{i\rho(1\pm i\alpha_1)}+O\left(\dfrac{1}{\rho^2}\right)$, $|\arg\rho|\in(\varepsilon,\pi-\varepsilon)$, (знак «+» при $\operatorname{Im}\rho>0$), значит, $\alpha_1=\widetilde{\alpha}_1$. Последнее равенство и асимптотика решений (1) позволяют получить

$$P_1(x,\rho)=O(\rho^{-1}),$$

учитывая аналитические свойства $P_1(x,\rho)$, заключаем, что $P_1(x,\rho)\equiv 0$, то есть $\Phi_1(x,\rho)\widetilde{\Phi}_2(x,\rho)=\widetilde{\Phi}_1(x,\rho)\Phi_2(x,\rho)$ или $\dfrac{\Phi_1(x,\rho)}{\widetilde{\Phi}_1(x,\rho)}=\dfrac{\Phi_2(x,\rho)}{\widetilde{\Phi}_2(x,\rho)}$. Но при $\arg\rho\in(\varepsilon,\pi-\varepsilon)$

$$\frac{\Phi_1(x,\rho)}{\widetilde{\Phi}_1(x,\rho)}=\exp\left(iq_1(x)-i\widetilde{q}_1(x)\right)[1]_\gamma,\quad \frac{\Phi_2(x,\rho)}{\widetilde{\Phi}_2(x,\rho)}=\exp\left(i\widetilde{q}_1(x)-iq_1(x)\right)[1]_\gamma,$$

следовательно, $q_1(x)=\widetilde{q}_1(x)$. Теперь можно получить следующую асимптотику:

$$P_2(x,\rho)=1+O(\rho^{-1}).$$

Значит, $P_2(x,\rho)\equiv 1$, тогда $\Phi_2(x,\rho)\widetilde{\Phi}_1'(x,\rho)-\widetilde{\Phi}_2'(x,\rho)\Phi_1(x,\rho)=1$. Отсюда выводим

$$\widetilde{\Phi}_2=\widetilde{\Phi}_2(\Phi_2\widetilde{\Phi}_1'-\widetilde{\Phi}_2'\Phi_1)=\widetilde{\Phi}_2\Phi_2\widetilde{\Phi}_1'-\widetilde{\Phi}_2'(\widetilde{\Phi}_2\Phi_1)=\widetilde{\Phi}_2\Phi_2\widetilde{\Phi}_1'-\widetilde{\Phi}_2'(\Phi_2\widetilde{\Phi}_1)=\Phi_2.$$

Аналогично $\widetilde{\Phi}_1=\Phi_1$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Келдыш М. В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11 – 14.

2. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. № 9. С. 190 – 229.

3. *Юрко В. А.* О восстановлении пучков дифференциальных операторов на полуоси // Мат. заметки. 2000. Т. 67, вып.2. С. 316 – 319.

4. *Горбунов О. Б.* О пучках дифференциальных операторов с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 27 – 29.