УДК 517.51

Е. В. Гудошникова

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ ОПЕРАТОРОВ*

Рассмотрим следующую конструкцию.

По линейным положительным операторам [1], которые определены на $[0,\infty)$ для $f:R\to R$ и являются обобщением ряда хорошо известных операторов, имеющим вид

$$l_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{u_{n,k}(x)}{v_n(x)}x^k,$$

где $u_{n,k}$ и v_n – функции, удовлетворяющие условиям:

1) $u_{n,k}(x)\geq 0$, $v_n(x)>0$ для $x\geq 0$ и $v_n(0)=1$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_{n,k}(x)\cdot x^k=v_n(x)$;

3) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}u_{n,k}(x)\cdot(-x)^k=\dfrac{v_n(x)}{v_n(2x)}$;

4) для $q_{n,k}(x)=\dfrac{u_{n,k}(x)}{v_n(x)}x^k$ выполняется соотношение

$$q'_{n,k}(x)=\frac{k-nx}{w(x)}q_{n,k}(x),$$

где $w(x)$ – дважды дифференцируемая функция, не имеющая нулей на $(0,\infty)$,

для $f:R_r\to R$ строятся операторы

$$L_n(f;\bar{x})=\sum_{\bar{k}=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{2^r-1}(-1)^{(\overline{mk})}f(\bar{k}_{n,m})\cdot p_{n,\bar{k}}(\bar{x}_m),$$

где $p_{n,\bar{k}}(\bar{x})=\prod\limits_{i=1}^{r}\dfrac{u_{n,k_i}(|x_i|)}{z_n(x_i)}x_i^{k_i}$;

$z_n(x)=v_n(|x|)+\dfrac{v_n(|x|)}{v_n(2|x|)}$;

$m=m_1+m_2\cdot 2+m_3\cdot 2^2+\ldots+m_r\cdot 2^{r-1}$, $m_k\in\{0;1\}$;

$\bar{x}=(x_1,\ldots,x_r)$;

$\bar{k}_{n,m}=\left(\frac{k_1}{n}(-1)^{m_1},\frac{k_2}{n}(-1)^{m_2},\ldots,\frac{k_r}{n}(-1)^{m_r}\right)$, где $k_j\in N_0$, $n\in N$;

$(\overline{mk})=m_1k_1+\ldots+m_rk_r$.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №04-01-00060).

Если в операторах L_n в качестве исходных взять операторы Саса-Миракьяна, то при $r=1$ получим операторы, введенные в рассмотрение Грофом [2]. Для произвольного r, для операторов, построенных также по операторам Саса-Миракьяна, в работах [3 – 5] доказаны теоремы, указывающие порядок приближения операторами L_n непрерывных, дифференцируемых и дважды дифференцируемых функций, а также доказывается теорема, являющаяся аналогом теоремы Вороновской [6].

В работе [6] приводятся аналогичные результаты для операторов L_n в общем виде.

Из этих теорем видно, что порядок приближения операторами L_n дифференцируемых функций по сути $n^{-1/2}$, дважды дифференцируемых – n^{-1}, и, как следует из теоремы типа Вороновской, порядок приближения для трижды и более раз дифференцируемых функций не улучшается. Таким образом, класс насыщения для рассматриваемых операторов – дважды дифференцируемые функции. Аналогичная ситуация имеет место и для исходных линейных положительных операторов.

Для p раз дифференцируемых функций рассмотрим операторы

$$\Lambda_{n,0}(f;\bar{x})=\Lambda_{n,1}(f;\bar{x})=L_n(f;\bar{x}),$$

и для $p\geq 2$

$$\Lambda_{n,p}(f;\bar{x})=L_n(f;\bar{x})-\sum_{k=2}^{p}\sum_{\alpha=k}^{*}\frac{1}{\alpha_1!.....\alpha_r!}S_n^{\alpha}(\bar{x})\Lambda_{n,p-k}(F_{\alpha}^{k};\bar{x}),$$

где $S_n^{\alpha}(\bar{x})=L_n(\prod_{i=1}^{r}(t_i-x_i)^{\alpha_i};\bar{x})$, $\sum\limits_{\alpha=k}^{*}$ берется по всем наборам целых неотрицательных чисел α_i, $i=1,...,r$, таким, что $\alpha_1+...+\alpha_r=k$, $F_{\alpha}^{k}=\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_r^{\alpha_r}}$.

Если взять $r=1$, а вместо операторов L_n операторы Бернштейна, то получим конструкцию, которая при $p=3$ была указана самим Бернштейном, а для любого p построена и изучена В. С. Виденским [7].

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА. Если функция $f:R_r\to R$ p раз дифференцируема, то

$$\left|\Lambda_{n,p}(f;\bar{x})-f(\bar{x})\right|\leq\frac{c(r,p)}{n^{p/2}}(1+\prod_{i=1}^{r}|w(x_i)|^{\alpha_i/2})\sum_{\alpha=p}^{*}\omega(F_{\alpha}^{p};\bar{h}),$$

где $c(r;p)$ – константа, зависящая только от r и p,

$$\omega\ (f,\bar{h}) = \sup_{\bar{\delta}\in Q(\bar{h})}\ \sup_{\bar{x}\in R_r} \left| f(\bar{x}+\bar{\delta}) - f(\bar{x}) \right|,\quad Q(\bar{h}) = [0,h_1]\times[0,h_2]\times\cdots\times[0,h_r],$$

$$\bar{h} = \left(\sqrt{\frac{|w(x_1)|}{n}}, \sqrt{\frac{|w(x_2)|}{n}}, \ldots, \sqrt{\frac{|w(x_r)|}{n}} \right).$$

Доказательство теоремы проводится по следующей схеме.

Применяя формулу Тейлора, получаем неравенство

$$\left|\Lambda_{n,p}(f,\bar{x}) - f(\bar{x})\right| \le \sum_{k=2}^{p} \sum_{\alpha=k}{}^{*} \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_r!} \left|F_\alpha^k(\bar{x}) - \Lambda_{n,p-k}(F_\alpha^k;\bar{x})\right| \cdot \left|S_n^\alpha(\bar{x})\right| +$$

$$+ \left| \sum_{\alpha=p}{}^{*} \frac{1}{\alpha_1!\ldots\alpha_r!} L_n\left([F_\alpha^p(\bar{\xi}) - F_\alpha^p(\bar{x})] \prod_{i=1}^{r} (t_i - x_i)^{\alpha_i}; \bar{x} \right) \right| \qquad (*)$$

где $\quad S_n^\alpha(\bar{x}) = L_n(\prod_{i=1}^{r}(t_i - x_i)^{\alpha_i};\bar{x})$; $\sum_{i=1}^{r}\alpha_i = \alpha$; $\bar{\xi} = \bar{x} + \theta(\bar{t} - \bar{x})$; $\theta\in[0;1]$.

Несложно показать, что $L_n(t^k;x) \to x^k$, и, находя порядок этого приближения, получаем оценку для выражения $\left|S_n^\alpha(\bar{x})\right|$. Аналогично, используя модуль непрерывности, получаем оценку для последнего слагаемого в (*). И после этого доказательство теоремы завершаем по индукции.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Коровкин П. П.* Линейные положительные операторы и теория приближений. М., 1959.

2. *Grof J.* Függvényapproximácó az egész számeqyensen, súlyozott hatványsorokkal // Mat. Lapok. 1977 – 1981. Vol. 29, № 1 – 3. P. 161 – 170.

3. *Гудошникова Е. В.* Приближение непрерывных функций многих переменных. Саратов, 2001. 10 с. Деп. в ВИНИТИ 03.10.2001, № 2083-В2001.

4. *Гудошникова Е. В.* Аппроксимативные свойства многомерных аналогов операторов Саса-Миракьяна. Саратов, 2001. 24 с. Деп. в ВИНИТИ 20.11.2001, № 2412-В2001.

5. *Гудошникова Е. В.* Приближение дифференцируемых функций многих переменных комбинациями многомерных аналогов операторов Саса-Миракьяна. Саратов, 2002. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 25.03.02, №530-В2002.

6. *Гудошникова Е. В.* Конструкции линейных операторов для функций многих переменных // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 40 – 42.

7. *Виденский В. С.* Многочлены Бернштейна. Л., 1990.