УДК 519.853

С. И. Дудов

О ПРИБЛИЖЕНИИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА ШАРОМ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА*

1. Пусть D – приближаемый выпуклый компакт из конечномерного пространства R^p, $n(\cdot)$ – некоторая норма на R^p,

$$\rho(A,B) = \sup_{a\in A}\inf_{b\in B} n(a-b),$$

$h(A,B) = \max\{\rho(A,B),\rho(B,A)\}$ – уклонение множества A от множества B и расстояние Хаусдорфа между A и B соответственно,

$$Bn(x,r) = \{y \in R^p : n(x-y) \le r\} -$$

шар с центром в точке x и радиусом r.

Рассмотрим задачу о наилучшем приближении заданного выпуклого компакта D шаром фиксированного радиуса r в метрике Хаусдорфа:

$$\varphi(x,r) \equiv h(D, Bn(x,r)) \to \min_{x\in R^p}. \tag{1}$$

Основная цель статьи – установить связь задачи (1) с задачами о внешней, внутренней и равномерной оценке компакта D шаром нормы $n(\cdot)$:

$$R(x) \equiv \max_{y\in D} n(x-y) \to \min_{x\in R^p}, \tag{2}$$

$$\rho_\Omega(x) \equiv \min_{y\in\Omega} n(x-y) \to \max_{x\in D},\ \Omega = \overline{R^p \setminus D}, \tag{3}$$

$$\varphi(x,r) \to \min_{x\in R^p, r\ge 0}. \tag{4}$$

Далее будем пользоваться обозначениями: $P(x) = \rho_D(x) - \rho_\Omega(x)$,

$$R^* = \min_{x\in R^p} R(x),\quad P^* = \min_{x\in R^p} P(x),\quad f(r) = \min_{x\in R^p}\varphi(x,r),$$

$$C_R = Arg\min_{x\in R^p} R(x),\quad C_P = Arg\min_{x\in R^p} P(x),\quad C(r) = Arg\min_{x\in R^p}\varphi(x,r),$$

$$R^\pm = \max_{x\in C_P}(\min) R(x),\quad P^\pm = \max_{x\in C_R}(\min) P(x),$$

$$r_R^\pm = \frac{R^* - P^\mp}{2},\quad r_P^\pm = \frac{R^\pm - P^*}{2}.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

2. Ниже устанавливается, что задачи (2) – (4) являются частными случаями задачи (1) в зависимости от значений параметра r на положительной полуоси, разделенной точками

$$0 < r_R^- \le r_R^+ \le r_P^- \le r_P^+ < \infty .$$

В [1] доказано, что при всех $x \in R^P$ и $r \ge 0$ выполняется

$$\varphi(x,r) = \max\{R(x) - r, r + P(x)\}. \tag{5}$$

Известно [2], что $R(x)$ и $P(x)$ являются выпуклыми конечными на R^P функциями. Поэтому из (5) следует, что $\varphi(x,r)$ является выпуклой по совокупности переменных (x,y) на $R^P \times R$. В соответствии с субдифференциальным исчислением для выпуклых функций [3] субдифференциал функции $\varphi(x,r)$ по x выражается через субдифференциалы функций $R(x)$ и $P(x)$ следующим образом:

$$\partial_x \varphi(x,r) = \begin{cases} \partial R(x), & \text{если} \quad R(x) - r > P(x) + r, \\ \partial P(x), & \text{если} \quad R(x) - r < P(x) + r, \\ co\{\partial R(x), \partial P(x)\}, & \text{если} \quad R(x) - r = P(x) + r. \end{cases} \tag{6}$$

Здесь $co\, A$ – выпуклая оболочка множества A.

ТЕОРЕМА. Имеет место формула

$$C(r) = \begin{cases} C_R \cap \{x \in R^P : R^* - r \ge P(x) + r\}, & \text{если} \quad r \in [0, r_R^+], \\ C_P \cap \{x \in R^P : R(x) - r \le P^* + r\}, & \text{если} \quad r \in [r_P^-, \infty), \end{cases} \tag{7}$$

$$f(r) = \begin{cases} R^* - r, & \text{если} \quad r \in [0, r_R^+], \\ P^* + r, & \text{если} \quad r \in [r_P^-, \infty). \end{cases} \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $r \in [0, r_R^+]$ и, следовательно, $R^* - r \ge \min\limits_{x \in C_R} P(x) + r$. Поэтому существует $x \in C_R$, для которого $R^* - r \ge P(x) + r$, то есть множество

$$\widetilde{C}(r) = C_R \cap \{x \in R^p : R^* - r \ge P(x) + r\} \ne \varnothing.$$

Возьмем произвольный элемент $x \in \widetilde{C}(r)$. С одной стороны, то, что $x \in C_R$, то есть x является точкой минимума выпуклой функции $R(x)$ на R^p, в соответствии с известным фактом выпуклого анализа [3, с. 142] означает, что выполняется включение

$$0_P \in \partial R(x). \tag{9}$$

С другой стороны, имеем

$$R(x) - r = R^* - r \ge P(x) + r. \tag{10}$$

Из (9), (10) и (6) получаем $0_P \in \partial_x \varphi(x,r)$, то есть точка x является точкой минимума выпуклой по x функции $\varphi(x,r) : x \in C(r)$ [3, с. 142]. Тем самым мы показали, что

$$\widetilde{C}(r) \subset C(r). \qquad (11)$$

Из (10), (11) и (5) следует

$$f(r) = R^* - r. \qquad (12)$$

то есть формула (8) в рассматриваемом случае.

Теперь докажем обратное к (11) включение. Допустим противное, и тогда найдется точка $x \in C(r)$ и $x \notin \widetilde{C}(r)$. Это означает, что либо $x \notin C_R$ и поэтому

$$\varphi(x,r) \geq R(x) - r > R^* - r,$$

либо $x \in C_R$, но $R^* - r < P(x) + r$, и, следовательно,

$$\varphi(x,r) \geq P(x) + r > R^* - r.$$

В обоих случаях ввиду (12) получаем противоречие с тем, что $x \in C(r)$. Таким образом, в рассматриваемом случае справедливость формул (7), (8) доказана. Случай $r \in [r_P^-, \infty)$ рассматривается аналогично. □

Непосредственно из доказанной теоремы получаем

Следствие 1.

$$C(r) = \begin{cases} C_R, & r \in [0, r_R^-], \\ C_P, & r \in [r_P^+, \infty), \end{cases}$$

то есть задача (1) становится эквивалентной задаче (2) или задаче (3) при соответствующих значениях r.

Нетрудно доказать, что функция $f(r)$ является выпуклой на R_+, поэтому формула (8) влечет

Следствие 2.

$$Arg \min_{r \in R_+} f(r) \equiv [r_-^*, r_+^*] \subset [r_R^+, r_P^+].$$

Поэтому множество центров шаров наилучшего приближения в задаче (4) выражает формула

$$C = \bigcup_{r \in [r_-^*, r_+^*]} C(r).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Dudov S. I., Zlatorunskaya I. V.* Best approximation of a compact convex set by a ball in an arbitrary norm // Advances in Math. Research. 2003. Vol. 2. P. 81 – 114.

2. *Дудов С. И., Златорунская И. В.* Равномерная оценка выпуклого компакта шаром произвольной нормы // Мат. сб. 2000. № 10. С. 13 – 38.

3. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.