УДК 519.853

А. С. Дудова

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ВЫПУКЛОГО КОМПАКТА МНОГОГРАННИКОМ

1. Пусть D – выпуклый телесный компакт из R^p с диаметром d содержит точку x_0 вместе с шаром радиуса $\rho : B(x_0, \rho) \subset D$ и $\varepsilon > 0$ – достаточно малое положительное число. Обозначим через $\{l_i\}, i \in I_\varepsilon$, где $\|l_i\| = 1$, – ε-сеть единичной сферы, то есть

$$\min_{i \in I_\varepsilon} \|l - l_i\| \leq \varepsilon, \forall l \in R^P : \|l\| = 1,$$

и $\{y_i\}$, $i \in I_\varepsilon$, – множество точек, получаемых как пересечение лучей $\{x_0 + \alpha l_i : \alpha > 0\}$, $i \in I_\varepsilon$ с границей компакта D.

Многогранник D_ε^-, являющийся выпуклой оболочкой точек $\{y_i\}, i \in I_\varepsilon$, содержится в компакте D и рассматривается как его внутренняя аппроксимация. Многогранник D_ε^+, образованный опорными к D гиперплоскостями в точках $\{y_i\}$, $i \in I_\varepsilon$, является внешней аппроксимацией к D. Цель статьи – дать оценку погрешности аппроксимации компакта D многогранниками D_ε^- и D_ε^+. Отметим, что другой способ аппроксимации рассматривался в [1], где ε-сеть $\{l_i\}$, $i \in I_\varepsilon$, использовалась в качестве множества нормалей опорных к D гиперплоскостей, которые порождали аппроксимации D многогранником.

2. Нетрудно доказать, что справедлива

ЛЕММА 1. Если точка $y_0 \in D$, то $co\{y_0, B(x_0, \rho)\} \subset D$. Причем, если некоторая точка $y \in R^P$ удовлетворяет неравенству

$$\|y - x_0 - \beta(y_0 - x_0)\| < (1 - \beta)\rho$$

при некотором значении $\beta \in [0,1)$, то $y \in \operatorname{int} D$.

Здесь $co\,A$, $\operatorname{int} A$ – соответственно выпуклая оболочка и внутренность множества A.

ЛЕММА 2. Пусть $\varepsilon \in (0, \frac{\rho}{d - \rho})$, а x и y – граничные точки компакта D такие, что

$$\left\| \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} - \frac{y - x_0}{\|y - x_0\|} \right\| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Тогда выполняется неравенство

$$\|x - y\| \leq \varepsilon(d - \rho)\left(1 + \frac{d - \rho}{\rho - \varepsilon(d - \rho)}\right). \tag{2}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим случай, когда $\|y - x_0\| < \|x - x_0\|$. Из (1) имеем

$$\left\| y - x_0 - \frac{\|y - x_0\|}{\|x - x_0\|}(x - x_0) \right\| \le \|y - x_0\| \varepsilon. \qquad (3)$$

Поскольку точка y является для D граничной, то из леммы 1 следует

$$\|y - x_0 - \beta(x - x_0)\| \ge (1 - \beta)\rho, \quad \forall \beta \in [0, 1). \qquad (4)$$

Тогда, взяв в качестве $\beta = \|y - x_0\| \|x - x_0\|^{-1}$, из (3), (4) получаем неравенство $\varepsilon\|y - x_0\| \ge (1 - \|y - x_0\|\|x - x_0\|^{-1})\rho$, простое преобразование которого приводит к

$$\|y - x_0\| \ge \rho\|x - x_0\|(\rho + \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1} \equiv \alpha^+. \qquad (5)$$

2. Пусть теперь $\|y - x_0\| > \|x - x_0\|$. Аналогичное применение леммы 1 дает неравенство $\|x - x_0\| \ge \rho\|y - x_0\|(\rho + \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1}$, откуда следует

$$\|y - x_0\| \le \rho\|x - x_0\|(\rho - \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1} \equiv \alpha^-. \qquad (6)$$

В рассмотренных случаях из (5), (6) вытекает, что $y - x_0 \in [\alpha^+(y - x_0)\|y - x_0\|, \alpha^-(y - x_0)\|y - x_0\|]$ и поэтому

$$\|x - y\| = \|x - x_0 - (y - x_0)\| \le \max\begin{cases} \left\|x - x_0 - \alpha^+(y - x_0)\|y - x_0\|^{-1}\right\|, \\ \left\|x - x_0 - \alpha^-(y - x_0)\|y - x_0\|^{-1}\right\|. \end{cases} \qquad (7)$$

Учитывая, что

$$\left\|x - x_0 - \alpha^{\pm}(y - x_0)\|y - x_0\|^{-1}\right\| = \varepsilon\|x - x_0\|(1 + \|x - x_0\|(\rho \pm \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1}),$$

из (7) получаем

$$\|x - y\| \le \varepsilon\|x - x_0\|(1 + \|x - x_0\|(\rho - \varepsilon\|x - x_0\|)^{-1}). \qquad (8)$$

А поскольку $\|x - x_0\| \in [\rho, d - \rho]$, то из (8) следует (2). □

3. Обозначим через $h(A, B)$ расстояние Хаусдорфа между множествами A и B из R^p. Очевидным следствием леммы 2 является неравенство

$$h(D, D_\varepsilon^-) \le \varepsilon(d - \rho)(1 + (d - \rho)(\rho - \varepsilon(d - \rho))^{-1}), \quad \varepsilon \in (0, \rho(d - \rho)^{-1}). \qquad (9)$$

Нетрудно видеть, что точное значение диаметра d в правой части (9) можно заменить на его вычисляемую оценку сверху:

$$d_\varepsilon = 2\rho R_\varepsilon(\rho - \varepsilon R_\varepsilon)^{-1},$$

где $R_\varepsilon = \max\limits_{i \in I_\varepsilon} \| y_i - x_0 \|$, следующую из неравенства (6), полученного в процессе доказательства леммы 2. Ясно также, что ρ можно заменить на вычисляемую оценку снизу

$$\rho_\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \min_{i \in I_\varepsilon} \| y_i - x_0 \|}.$$

Легко видеть, что d_ε является оценкой сверху и для диаметра многогранника D_ε^+. А поскольку $h(D, D_\varepsilon^+) \le h(D_\varepsilon^-, D_\varepsilon^+)$ и D_ε^- является одновременно внутренней аппроксимацией для D_ε^+, то приходим в итоге к выводу, что справедлива

ТЕОРЕМА. При $\varepsilon \in (0, \rho_\varepsilon (d_\varepsilon - \rho_\varepsilon)^{-1})$ справедлива следующая оценка погрешности аппроксимаций:

$$h(D, D_\varepsilon^\pm) \le \varepsilon (d_\varepsilon - \rho_\varepsilon)(1 + (d_\varepsilon - \rho_\varepsilon)(\rho_\varepsilon - \varepsilon(d_\varepsilon - \rho_\varepsilon))^{-1}).$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М., 2004.

УДК 517.95

М. Ю. Игнатьев

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДФ НА ПОЛУОСИ С НЕОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ*

Рассмотрим смешанную задачу

$$u_t = u_{xxx} - 6uu_x, \quad x \ge 0, \ t \ge 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = a, \ u_{xx}(0,t) = b, \tag{2}$$

$$u(x,0) = q(x), \tag{3}$$

где a, b – вещественные константы. Известно, что задача (1) – (3) имеет бесконечно много интегралов движения и высших симметрий [1, 2]. Важный частный случай $a = b = 0$ подробно изучен в работах [3, 4], где построена процедура интегрирования такой задачи с помощью некоторой модификации метода обратной задачи рассеяния (МОЗР). Случай ненулевых a, b изучался в [2], где построены и исследованы конечнозонные, солитонные и некоторые другие частные решения уравнения КдФ, удовле-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376) и РФФИ (проект 04-01-00007).