УДК 513.6

И. А. Кляева

ГОМОЛОГИИ ТОЛЕРАНТНЫХ СФЕР

В статье произведены вычисления групп гомологий толерантных сфер.

Толерантные пространства [1] – это пары вида (X,τ), где X – множество, а $\tau \in X \times X$ – отношение толерантности на нем, то есть рефлексивное и симметричное бинарное отношение. Отношение толерантности интерпретируется как наиболее общая математическая модель понятия схожести.

В гомотопической теории толерантных пространств роль единичного отрезка играют толерантные пространства (I_n, ι_n), где $I_n = \left\{ \frac{k}{n} / k = \overline{0,n} \right\}$ – множество точек деления единичного отрезка $[0,1]$ на n частей, а толерантность ι_n задается условием $\frac{k}{n} \iota_n \frac{l}{n} \Leftrightarrow |k-l| \le 1$.

Пусть m – натуральное число. Рассмотрим m-ю декартову степень толерантного отрезка $X = \left(\overset{m}{\times} I_n, \overset{m}{\times} \iota_n \right)$. Возьмем «границу» пространства X:

$$DX = \left\{ \left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_m}{n} \right) / \exists k_i \in \{0, n\} \right\},$$

отождествим все эти точки между собой, и класс этих отождествленных точек обозначим символом O.

<u>Определение 1.</u> Толерантной сферой будем называть множество $S_n^m = (X \setminus DX) \cup O$ с толерантностью τ, определенной следующим образом:

$$\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_m}{n} \right) \tau \left(\frac{k_1'}{n}, \ldots, \frac{k_m'}{n} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} \left| k_i - k_i' \right| \le 1 \ \left(\forall i = \overline{1,m} \right), \\ \quad \text{если } k_i = \overline{1, n-1},\ k_i' = \overline{1, n-1}; \\ \exists\, k_i' \in \{0, 1, n-1, n\}, \\ \text{если } \exists k_i \in \{0, n\}, \text{ т.е. } \left(\frac{k_i}{n}, \ldots, \frac{k_m}{n} \right) = O. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА. Пусть m – натуральное число и $n \ge 4$, тогда

$$H_q\left(S_n^m\right) = \begin{cases} \mathbf{Z},\ q = 0, m, \\ 0,\ q \ne 0,\ q \ne m. \end{cases}$$

Пусть $n < 4$, тогда

$$H_q\left(S_m^n\right)=\begin{cases}\mathbf{Z},\ q=0,\\ 0,\ q>0.\end{cases}$$

Доказательство. Докажем эту теорему индукцией по m с использованием последовательности Майера – Виеториса [2] для пары подпространств $X_1=\left\{x\in S_n^m / k_m>2\right\}$, $X_2=\left\{x\in S_n^m / k_m<n-2\right\}$ и $X_1\bigcup X_2=S_n^m$. Сначала покажем толерантную стягиваемость пространств X_1, X_2 [2].

Для пространства X_2 определим отображение $F: X_1\times I_{n-2}\to X_2$ следующей формулой:

$$\left(\forall i=\overline{1,m-1}\right)\left(\forall l_i=\overline{0,n}\right)\left(\forall l_m=\overline{0,n-2}\right)\left(\forall k=\overline{0,n-2}\right)$$

$$F\left(\frac{l_1}{n},\dots,\frac{l_{m-1}}{n},\frac{l_m}{n},\frac{k}{n-2}\right)=\left(\frac{l_1}{n},\dots,\frac{l_{m-1}}{n},\frac{\min\left\{l_m,n-2-k\right\}}{n}\right).$$

Проверяется, что F – толерантное отображение, осуществляющее толерантную гомотопию между тождественным отображением 1_{X_2} и постоянным отображением пространства X_2 в точку O [2]. Это говорит о стягиваемости X_2 к точке O.

Аналогично показывается стягиваемость пространства X_1 к точке O.

Подобным образом доказывается толерантная гомотопическая эквивалентность пространств:

$$X_1\bigcap X_2 \quad \text{и} \quad A=\left\{\left(\frac{l_1}{n},\dots,\frac{l_{m-1}}{n},\frac{2}{n}\right)/\left(\forall i=\overline{1,m-1}\right)\ l_i=\overline{0,n}\right\}.$$

Из гомотопической теории толерантных пространств [2] известен факт, что толерантно гомотопически эквивалентные пространства имеют изоморфные группы гомологий. Таким образом, $H_q\left(X_1\bigcap X_2\right)\cong H_q(A)$. А так как имеется очевидный толерантный гомеоморфизм $\varphi: A\to S_n^{m-1}$, то

$$\left(\forall q\geq 0\right)\ H_q\left(X_1\bigcap X_2\right)\cong H_q\left(S_n^{m-1}\right). \tag{1}$$

Кроме того, для толерантно стягиваемых пространств $X_i\,(i=1,2)$ имеем

$$H_q\left(X_i\right)=\begin{cases}\mathbf{Z},\ q=0;\\ 0,\ q>0.\end{cases} \tag{2}$$

При $n>4$ для пары X_1, X_2 выполняются аксиомы соединения и вырезания [2], что позволяет выписать точную гомологическую последовательность Майера – Виеториса:

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_q(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} H_q(X_1) \oplus H_q(X_2) \xrightarrow{j_*}$$
$$\xrightarrow{j_*} H_q(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

Для $m = 1$ и $k = 1$, согласно (1) и (2), перепишем последовательность Майера – Виеториса:

$$\ldots \to 0 \xrightarrow{j_*} H_1(S_n^1) \xrightarrow{\partial_*} H_0(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{i_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{j_*} \ldots \qquad (3)$$

Рассмотрим S_n^1. Это отрезок, концы которого отождествлены в одну точку O, тогда $X_1 = \left[\frac{2}{n}, 1\right]$, $X_2 = \left[0, \frac{n-2}{n}\right]$. В этом случае $X_1 \cap X_2 = = \left[\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right] \cup O$. Множество $\left[\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n}\right]$ стягиваемо к одной точке B. Тогда $X_1 \cap X_2$ толерантно гомотопически эквивалентно множеству $\{B, O\}$, которое представляет собой S_n^0. Так как $H_0(S_n^0) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, то (3) можно переписать как

$$\ldots \to 0 \xrightarrow{j_*} H_1(S_n^1) \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{j_*} \ldots$$

где $i_*(m_1, m_2) = (m_1 + m_2, -(m_1 + m_2))$. Согласно точности в члене $H_1(S_n^1)$, $Ker\partial_* = \{0\}$ и ∂_* является изоморфизмом. Следовательно, по теореме об изоморфизме

$$H_1(S_n^1) \cong \operatorname{Im}\partial_* = Ker\ i_*,$$

где $Ker\ i_* = \{(m, -m) \mid m \in \mathbf{Z}\} \cong \{m \mid m \in \mathbf{Z}\} = \mathbf{Z}$.

Значит, $H_1(S_n^1) = \mathbf{Z}$.

Для $m = 1$ и $q > 1$ запишем последовательность Майера – Виеториса:

$$\ldots \to 0 \xrightarrow{j_*} H_q(S_n^1) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(S_n^0) \xrightarrow{i_*} 0 \to \ldots \qquad (4)$$

Точность последовательности (4) дает изоморфизм

$$\partial_*: H_q(S_n^1) \cong H_q(S_n^0) = 0 \quad (\forall q > 1).$$

Таким образом, имеется база индукции.

Пусть $m > 1$ и утверждение теоремы справедливо при $m - 1$. Докажем его для m.

При $q = 1$, используя предположение индукции, будем иметь

$$\ldots \to 0 \xrightarrow{j_*} H_1(S_n^m) \xrightarrow{\partial_*} \mathbf{Z} \xrightarrow{i_*} \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \xrightarrow{j_*} \ldots,$$

где $Ker\ i_* = \{0\}$, следовательно, из точности последовательности $\operatorname{Im}\partial_* = 0$ и $H_1(S_n^m) = 0$.

При $q > 1$ имеем

$$\ldots \to 0 \xrightarrow{j_*} H_q(S_n^m) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(S_n^{m-1}) \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{j_*} \ldots$$

Откуда делаем вывод, что

$$H_q(S_n^m) \cong H_{q-1}(S_n^{m-1}).$$

При $n = 4$ эта теорема доказывается с помощью стандартного агебротопологического алгоритма.

При $n < 4$ пространства S_n^m толерантно стягиваемы, поэтому их группы гомологий совпадают с гомологиями точки.

Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Zeeman E.C.* The topology of brain and visual perception // The topology of 3-Manifolds. N. Y., 1962. P. 240 – 256.

2. *Небалуев С.И.* Гомологическая теория толерантных пространств: Учеб. пособие. Саратов, 2004. 120 с.

УДК 519.984

А. В. Кожевникова

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА ВСЕМ ОТРЕЗКЕ [0,1]*

В настоящей статье исследуется вопрос о разложении по собственным функциям дифференциального уравнения

$$y''' + \lambda y = 0 \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y(1) = 0 \tag{2}$$

на всем отрезке $[0,1]$. Известно, что задача разложения по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) для нашего случая и даже для более общего была рассмотрена в [1]. Теорема равносходимости в [1] была получена на любом отрезке $[0,a] \in [0,1)$. В данной статье подобный результат получен для сходимости на всем отрезке $[0,1]$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).