ТЕОРЕМА 3. Пусть функция $f(z)$:

1) является аналитической в области T, образованной четырехугольником с вершинами в точках $0, x_1, x_3, 1$;

2) непрерывно дифференцируема на отрезках $[0, x_1]$ и $[0, x_3]$;

3) дважды непрерывно дифференцируема на отрезках $[x_1, 1]$, $[x_3, 1]$ и $[0,1]$;

4) удовлетворяет соотношению $f(1) = 0$;

5) удовлетворяет функциональному соотношению

$$f(-\omega^2 x) + (1-\omega) f(\omega x) = 0 \text{ для } x \in [0,1],$$

тогда

$$\lim_{|\rho| \to \infty} \max_{x \in [0,1]} \left| f(x) - S_q(f) \right| = 0,$$

где $S_q(f)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по собственным функциям краевой задачи (1), (2).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П.* Разложение по собственным функциям дифференциального оператора с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Вычислительные методы и программирование для ЭВМ Урал-2, Урал-4. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1966. С. 82 – 100.

УДК 531.38

В. В. Корнев

КВАТЕРНИОННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА*

Любой поворот твердого тела вокруг неподвижной точки представим в виде трех последовательных поворотов вокруг ортогональных осей, жестко связанных с твердым телом. Математическая постановка задачи нахождения этих трех поворотов на языке кватернионов имеет следующий вид.

Пусть задан кватернион

$$\overline{m} = m_0 + m_1\overline{i} + m_2\overline{j} + m_3\overline{k}, \quad \|m\| = m_0^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 1.$$

Требуется найти кватернионы $\overline{a} = a_0 + a_1\overline{i}$, $\overline{b} = b_0 + b_2\overline{j}$ и $\overline{c} = m_0 + c_3\overline{k}$ такие, что

$$\overline{b} \circ \overline{a} \circ \overline{c} = \overline{m}, \quad \|\overline{a}\| = \|\overline{b}\| = \|\overline{c}\| = 1. \tag{1}$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

Рассмотрим вспомогательную задачу: по заданному кватерниону $\bar{n} = n_0 + n_1\bar{i} + n_2\bar{j} + n_3\bar{k}$, $\|\bar{n}\|=1$, найти кватернионы $\bar{a} = a_0 + a_1\bar{i}$ и $\bar{b} = b_0 + b_2\bar{j}$, такие, что

$$\bar{b} \circ \bar{a} = \bar{n}, \quad \|\bar{a}\|=\|\bar{b}\|=1. \tag{2}$$

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы задача (2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$n_0 n_3 + n_1 n_2 = 0. \tag{3}$$

Если решение существует, то оно единственно с точностью до знака.

Доказательство. Необходимость проверяется непосредственно. Для доказательства достаточности уравнение (2) надо записать в виде системы четырех скалярных уравнений, которая имеет следующее решение:

а) если $n_0^2 + n_1^2 \neq 0$, то

$$\begin{gathered} a_0 = n_0 / N, \; a_1 = n_1 / N, \quad N = \pm\sqrt{n_0^2 + n_1^2}, \\ b_0 = N, \quad b_2 = \begin{cases} n_2 N / n_0, \text{ если } n_0 \neq 0; \\ -n_3 N / n_1, \text{ если } n_0 = 0, \end{cases} \end{gathered} \tag{4}$$

б) если $n_0 = n_1 = 0$, то $\bar{a} = n_2 - n_3\bar{i}$, $\bar{b} = \bar{j}$.

Для решения исходной задачи (1) введем обозначения

$$A = m_0 m_3 + m_1 m_2, \quad B = m_0^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_3^2.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $A \neq 0$, то задача (1) имеет два решения: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и

$$\bar{j} \circ \bar{a} \circ \bar{k}, \; \bar{b} \circ \bar{j}, \; \bar{k} \circ \bar{c}, \tag{5}$$

где $\bar{c}$ определяется по формулам

$$c_0 = \frac{|A|}{\sqrt{A^2 + D^2}}, \; c_3 = \operatorname{sgn} A \frac{D}{\sqrt{A^2 + D^2}}, \; D = \frac{1}{2}\left(-B \pm \sqrt{B^2 + 4A^2}\right), \tag{6}$$

а кватернионы $\bar{a}, \bar{b}$ – по формулам (4), в которых $\bar{n} = \bar{m}_0 \circ (c_0 - c_3\bar{k})$.

Если $A = 0$ и $B \neq 0$, то задача (1) имеет два решения: первое решение определяется по формулам (4), в которых $\bar{n} = \bar{m}$, $\bar{c} = 1$, а второе решение получается из первого по формулам (5).

Если $A = B = 0$, то задача (1) имеет бесконечно много решений: $\bar{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \pm \bar{i})$, $\bar{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{m} \circ (c_0 - c_3\bar{k}) \circ (1 \mp \bar{i})$, $\bar{c} = c_0 + c_3\bar{k}$ – произвольный кватернион (верхний знак соответствует случаю $m_0 = m_1$, нижний знак – случаю $m_0 = -m_1$).

Доказательство. Пусть $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – решение задачи (1). Тогда

$$\bar{b} \circ \bar{a} = \bar{n},$$

где $\bar{n} = \bar{m} \circ \bar{c}^{-1}$. Отсюда по теореме 1 следует, что c_0 и c_3 являются решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} Ax^2 - Bxy - Ay^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

С другой стороны, если x, y – решение (7), $\bar{c} = x + y\bar{k}$, $\bar{n} = \bar{m} \circ \bar{c}^{-1}$, то, решив задачу (2), мы получим решение задачи (1). Таким образом, решая систему (7), мы получаем полное решение исходной задачи (1), сформулированное в теореме.

Эти теоремы дают полный алгоритм решения задачи (1).

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ОБ ОДНОЙ ИГРОВОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕГОВОРОВ

В данной статье исследуется задача нахождения компромисса в конфликтной ситуации со многими участниками [1]. Для моделирования процесса переговоров построена игра n лиц в нормальной форме, которая при определенных условиях имеет единственную ситуацию равновесия. Основой построения служит модель двусторонних переговоров, разработанная в [2].

Пусть имеются n игроков, которые путем совместных действий могут получить любой исход из множества P, где P – замкнутое выпуклое подмножество R^n (координатами исходов являются выигрыши игроков). Если же игроки не договорятся о совместных действиях, то ни один их них не может гарантированно получить результат лучший, чем ему дает точка $p_0 \in R^n$, называемая конфликтным исходом. Будем считать, что у игроков имеются непрерывные функции $f_i(p_1, p_2)$, $i = 1, \dots, n$, выражающие степень предпочтения одного исхода другому, более того, эти функции для различных игроков сравнимы.

Условимся об обозначениях. Вычисления для точек p_1 и p_2 с координатами $(x_1^1, \dots, x_i^1, \dots, x_n^1)$ и $(x_1^2, \dots, x_i^2, \dots, x_n^2)$ соответственно неравенства $x_i^1 \le x_i^2$ будем записывать в виде $p_1 \underset{(i)}{\le} p_2$. Аналогично объясняются обозначения $p_1 \underset{(i)}{<} p_2$, $p_1 \underset{(i)}{\approx} p_2$, $p_1 \underset{(ij)}{\approx} p_2$. Через P^* обозначим множество оптимальных по Парето элементов множества P, удовлетворяющих условию $p \underset{(i)}{\ge} p_0$, $i = 1, \dots, n$. Предполагается, что $p_0 \notin P^*$.

Построим игру, моделирующую процесс переговоров между игроками. Стратегией каждого игрока является выдвижение своего предложения, т.е. указание в множестве P^* исхода, который он хотел бы иметь в качестве результата игры. После выдвижения каждым игроком своего предложе-