УДК 517.984

В. П. Курдюмов, А. П. Хромов

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ*

В [1] установлена базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций (с.п.ф.) оператора L:

$$Ly = by'(x) + y'(1-x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

$$\int_0^1 y(t)\,d\sigma(t) = 0 \tag{2}$$

в том случае, когда $\sigma(t)$ является ступенчатой функцией. Теперь этот результат распространяется на случай, когда $\sigma(t)$ является произвольной функцией ограниченной вариации. Предполагаем, что выполняются условия

$$b^2 \neq 1, \qquad \alpha\beta \neq 0, \qquad \left(\gamma^2\alpha^2 - \beta^2\right)\left(\gamma^2\beta^2 - \alpha^2\right) \neq 0, \tag{3}$$

где $\alpha = \sigma(+0) - \sigma(0)$, $\beta = \sigma(1) - \sigma(1-0)$, $\gamma = d(1+bd)^{-1}$, $d = (b^2-1)^{-1/2}$.

Введем в рассмотрение операторы:

$$A_1^0 f = \int_0^{1-x} f(x+\tau)\,d\sigma(\tau), \qquad A_2^0 f = \int_0^{1-x} f(1-x-\tau)\,d\sigma(\tau),$$

$$A_3^0 f = \int_x^1 f(\tau - x)\,d\sigma(\tau), \qquad A_4^0 f = \int_x^1 f(1+x-\tau)\,d\sigma(\tau),$$

где $f(x) \in C[0,1]$. Так как $\left\|A_j^0 f\right\| \le \|f\| \overset{1}{\underset{0}{V}}(\sigma)$, где норма берется в $L_2[0,1]$, то эти операторы могут быть продолжены по непрерывности на все $L_2[0,1]$ и эти продолжения будем обозначать A_j. Далее, для определенности будем считать, что $\mathrm{Re}\,\lambda d \ge 0$.

ЛЕММА 1. Обозначим через $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ резольвенту оператора L (E – единичный оператор, λ – спектральный параметр). Тогда, если $f(x) \in L_2[0,1]$, то $R_\lambda f$ представляет собой линейную комбинацию операторов $\int_x^1 e^{\lambda d(x-t)}\Phi(t)\,dt$ и $\int_0^x e^{-\lambda d(x-t)}\Phi(t)\,dt$ с постоянными коэффициентами и операторов $e^{-\lambda dx}F_j(f,\lambda)$, $e^{\lambda d(x-1)}F_j(f,\lambda)$ с коэффициентами, представи-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

мыми в виде произведения постоянных чисел на элементы матрицы $\Delta^{-1}(\lambda)$. Здесь $\Phi(x)$ есть линейные комбинации $f(x)$ и $f(1-x)$ с постоянными коэффициентами,

$$F_j(f,\lambda)=\int_0^1 e^{-\lambda dt}A_j f(t)\,dt,$$

$$\Delta(\lambda)=\int_0^1 S(\Gamma V(\tau,\lambda))\,d\sigma(\tau),\qquad \Gamma=\begin{pmatrix}1 & \gamma\\ \gamma & 1\end{pmatrix},\qquad V(x,\lambda)=diag\left(e^{\lambda d(x-1)},e^{-\lambda dx}\right),$$

S – оператор, определяемый по формуле

$$S\begin{pmatrix}p_1(x) & p_2(x)\\ p_3(x) & p_4(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p_1(x) & p_2(x)\\ p_3(1-x) & p_4(1-x)\end{pmatrix}.$$

ЛЕММА 2. Собственные значения λ_k оператора L находятся в некоторой полосе $|\operatorname{Re}\lambda d|\le h$, причем в любом прямоугольнике $c\le \operatorname{Im}\lambda d\le c+1$ этой полосы их число ограничено постоянной, не зависящей от c.

Лемма 2 и условие (3) позволяют представить всю полосу $|\operatorname{Re}\lambda d|\le h$ [1, с. 81] в виде объединения конечного числа различных групп прямоугольников, границы которых Γ_m состоят из отрезков, лежащих на прямых $\operatorname{Re}\lambda d=\pm h$ и отрезков, параллельных вещественной оси длины $2h$. При этом $\inf\limits_{z\in\Gamma_m,k,m}\|z-\lambda_k d\|>0$ и, кроме того, каждая группа состоит из равных между собой прямоугольников, и для каждого прямоугольника конкретной группы существует целое t_m, что $\Gamma_m=\Gamma+it_m$, Γ – граница некоторого фиксированного прямоугольника из этой группы.

ЛЕММА 3. Пусть J – любой конечный набор целых чисел. Тогда имеет место оценка

$$\left\|\sum_{m\in J}\int_{\Gamma_m}R_{\lambda/d}\,d\lambda\right\|\le c,$$

равномерная по J.

ЛЕММА 4. Система с.п.ф. оператора L полна в $L_2[0,1]$.

Теперь сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА. Система с.п.ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2[0,1]$. При этом в скобки нужно объединить те с.п.ф., которые отвечают λ_k, для которых $\lambda_k d$ попали в контуры Γ_m.

Доказательство. Обозначим $E(m)=-\frac{1}{2\pi id}\int_{\Gamma_m}R_{\lambda/d}\,d\lambda$ и покажем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}E(m_k)f(x)$ сходится к $f(x)$, где $m_1,m_2,\ldots$ – какой-то наперед заданный порядок целых чисел. По лемме 4 система с.п.ф. $\{\varphi_k(x)\}$ оператора L полна в $L_2[0,1]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда существует номер r и числа α_k, $k = 1,2,...,r$, такие, что $\left\| f - \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k \right\| \le \varepsilon$. Пусть $S_q = \sum_{k=1}^{q} E(m_k)$. Тогда по лемме 3 при q достаточно больших

$$\left\| f - S_q f \right\| \le \left\| f - \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k - S_q\left(\sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k \right) \right\| +$$

$$+ \left\| S_q\left(f - \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k \right) \right\| \le \varepsilon + c\varepsilon.$$

Единственность разложения очевидна. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80 – 82.

УДК 517.5

С. Ф. Лукомский

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ – УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА, БЛИЗКИХ К L_∞*

Пусть $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ – функция Орлича, т.е. возрастающая выпуклая непрерывная функция, такая, что $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t)/t = +\infty$ и $\lim_{t \to +0} \varphi(t)/t = 0$, и пусть $L(\varphi)$ – пространство Орлича, порожденное этой функцией, т.е.

$$L(\varphi) = \left\{ f \in L(0,1) : \| f \|_{L(\varphi)} = \inf\left\{ \lambda > 0 : \int_0^1 \varphi\left(\frac{|f(t)|}{\lambda} \right) dt \le 1 \right\} \right\}.$$

Если φ удовлетворяет Δ_2 условию, т.е. $\exists t_0, C > 0$, что $\forall t \ge t_0$ $\varphi(2t) \le C \cdot \varphi(t)$, то [1] для частичных сумм $S_m(f)$ рядов Фурье – Уолша функции $f \in L(\widetilde{\varphi})$ при некоторой постоянной $C_1(\varphi)$ справедливо неравенство

$$\| S_m(f) \|_{L(\varphi)} \le C_1(\varphi) \cdot \| f \|_{L(\widetilde{\varphi})}, \text{ где } \widetilde{\varphi}(x) = x \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2} dt.$$

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00390), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.374).