тора $L$ полна в $L_2[0,1]$. Зададим $\varepsilon > 0$. Тогда существует номер $r$ и числа $\alpha_k$, $k = 1,2,...,r$, такие, что $\left\| f - \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k \right\| \le \varepsilon$. Пусть $S_q = \sum_{k=1}^{q} E(m_k)$. Тогда по лемме 3 при $q$ достаточно больших

$$\left\| f - S_q f \right\| \le \left\| f - \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k - S_q \left( \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k \right) \right\| +$$

$$+ \left\| S_q \left( f - \sum_{k=1}^{r} \alpha_k \varphi_k \right) \right\| \le \varepsilon + c\varepsilon .$$

Единственность разложения очевидна. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 80 – 82.

УДК 517.5

**С. Ф. Лукомский**

## СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ – УОЛША В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА, БЛИЗКИХ К $L_\infty$ *

Пусть $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ – функция Орлича, т.е. возрастающая выпуклая непрерывная функция, такая, что $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi(t)/t = +\infty$ и $\lim\limits_{t \to +0} \varphi(t)/t = 0$, и пусть $L(\varphi)$ – пространство Орлича, порожденное этой функцией, т.е.

$$L(\varphi) = \left\{ f \in L(0,1) : \| f \|_{L(\varphi)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_0^1 \varphi\left( \frac{|f(t)|}{\lambda} \right) dt \le 1 \right\} \right\}.$$

Если $\varphi$ удовлетворяет $\Delta_2$ условию, т.е. $\exists t_0, C > 0$, что $\forall t \ge t_0$ $\varphi(2t) \le C \cdot \varphi(t)$, то [1] для частичных сумм $S_m(f)$ рядов Фурье – Уолша функции $f \in L(\widetilde{\varphi})$ при некоторой постоянной $C_1(\varphi)$ справедливо неравенство

$$\| S_m(f) \|_{L(\varphi)} \le C_1(\varphi) \cdot \| f \|_{L(\widetilde{\varphi})}, \text{ где } \widetilde{\varphi}(x) = x \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t^2} dt .$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 03-01-00390), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.374).

Нас будет интересовать случай, когда $\varphi$ не удовлетворяет условию $\Delta_2$.

Пусть $\psi:(0,1]\to(0,+\infty)$ – функция Лоренца, т.е. непрерывная убывающая функция такая, что $\lim\limits_{t\to 0+0}\psi(t)=+\infty$ и $\varphi\circ\psi\in L(0,1)$. Определим пространства $L(\varphi,\psi)$, состоящие из тех $f\in L[0,1]$, для которых конечна норма

$$|||f|||_{L(\varphi,\psi)}=\inf\left\{\lambda>0:\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\|f\|_n\,\psi(2^{-n})\frac{1}{\lambda}\right)\le 1\right\}.$$

ТЕОРЕМА 1. 1) $L(\varphi,\psi)$ есть банахово пространство с нормой $|||\cdot|||_{L(\varphi,\psi)}$;

2) если $\varphi\in\Delta_2$, то $\Lambda(\varphi,\psi)$ – сепарабельно.

ТЕОРЕМА 2. Если $f\in L\left(\varphi,\log\frac{2}{x}\right)$, то существует постоянная $C(\varphi,\psi)>0$, что $\|S_m(f)\|_{L(\varphi)}<C(\varphi,\psi)|||f|||_{L(\varphi,\psi)}$, где $\psi(x)=\log\frac{2}{x}$.

Доказательство теоремы 1. При доказательстве вместо $|||\cdot|||_{L(\varphi,\psi)}$ будем писать просто $|||\cdot|||$. Стандартным образом [2, с. 150] и используя выпуклость функции $\varphi$, убеждаемся, что $|||\cdot|||$ есть норма и $L(\varphi,\psi)$ есть линейное пространство. Для доказательства полноты достаточно [2, с. 142] проверить выполнение следующих свойств:
$(B)$: если $0\le f_n(t)\uparrow f(t)$ и $\sup|||f_n|||<+\infty$, то $f\in L(\varphi,\psi)$;
$(C)$: если $0\le f_n(t)\uparrow f(t)\in L(\varphi,\psi)$, то $|||f_n|||\to|||f|||$.
Проверим условие $(B)$. Можно считать, что $\sup|||f_n|||=1$. Из определения нормы $|||\cdot|||$ следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\|f_m\|_n\,\psi(2^{-n}))2^{-n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\|f_m\|_n\,\psi(2^{-n})\frac{1}{|||f_m|||}\right)2^{-n}\le 1. \qquad (1)$$

Поэтому $\forall\, n,m\in\mathrm{N}$

$$\varphi(\|f_m\|_n\,\psi(2^{-n}))\le 2^n \text{ т.е. } \|f_m\|_n\le\varphi^{-1}(2^n)/\psi(2^{-n}).$$

Отсюда по теореме Леви

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^1|f_m(t)|^n\,dt=\int_0^1|f_m(t)|^n\,dt\le(\varphi^{-1}(2^n)/\psi(2^{-n}))^n,$$

т.е. $f\in L_n(0,1)$ при всех $n\in\mathbf{N}$, а значит, $\lim\limits_{m\to\infty}\|f_m\|_n=\|f\|_n$. Из (1) следует, что $\sum\limits_{n=1}^{N}\varphi(\|f_m\|_n\,\psi(2^{-n}))2^{-n}\le 1$ $(N\in\mathbf{N})$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $m\to\infty$ и учитывая произвольность $N$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(\|f\|_n\,\psi(2^{-n}))2^{-n}\le 1.$$

Отсюда следует, что $f\in L(\varphi,\psi)$ и $|||f|||\le 1$, а значит, и

$$|||f|||\le \sup_m |||f_m|||=\lim_{m\to\infty}|||f_m|||.$$

Проверим условие $(C)$. Пусть $0\le f_m(t)\uparrow f(t)\in L(\varphi,\psi)$. Можно считать, что $|||f|||=1$. Тогда $|||f_m|||\le 1$. Значит, выполнено условие $(B)$, и потому $|||f|||\le \lim|||f_m|||$. Но ввиду монотонности верно и обратное неравенство $|||f|||\ge \lim|||f_m|||$. Таким образом, условие (C) выполнено, и пространство $L(\varphi,\psi)$ – полное.

Пусть теперь $\varphi\in\Delta_2$. Для доказательства сепарабельности достаточно [2, с. 142] проверить выполнение условия
$(A)$: если $f_m(t)\downarrow 0$, то $|||f_m|||\downarrow 0$.
Для этого отметим, что при $\lambda=|||f_1|||$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\|f_m\|_n\,\psi(2^{-n})\frac{1}{\lambda}\right)2^{-n}\le\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\|f_1\|_n\,\psi(2^{-n})\frac{1}{\lambda}\right)2^{-n}\le 1.$$

Но тогда $\|f_m\|_n\le\varphi^{-1}(2^n)|||f_1|||/\psi(2^{-n})$, и по теореме Лебега о предельном переходе $\lim\limits_{m\to\infty}\|f_m\|_n=0$ при всех $n\in\mathbf{N}$. Снова применяя теорему Лебега, находим, что при любом $\lambda>0$

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\|f_m\|_n\,\psi(2^{-n})\frac{1}{\lambda}\right)2^{-n}=0.$$

Если выберем $\lambda=\frac{1}{2^p}$ $(p\in\mathbf{N})$, то из $\varphi\in\Delta_2$ следует, что $\exists m\in\mathbf{N}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\|f_m\|_n\,\psi(2^{-n})\frac{1}{\lambda}\right)2^{-n}\le C^p\sum_{n=1}^{\infty}\varphi\left(\|f_m\|_n\,\psi(2^{-n})\right)2^{-n}\le 1$$

при $m\ge m_0$. Это означает, что $\forall m\ge m_0\ |||f_m|||\le\frac{1}{2^p}$, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty}|||f_m|||=0$, и теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Заметим, прежде всего, что норму $|||\cdot|||_{L(\varphi,\psi)}$ можно определить и для случая $\psi(t)\equiv 1$. Будем обозначать эту норму через $|||\cdot|||_{L(\varphi,1)}$. Покажем, что $\|f\|_{L(\varphi)}\le 4|||f|||_{L(\varphi,1)}$. Для этого проверим вначале, что $f^*(2^{-n})\le 4\|f\|_n$. В самом деле

$$\|f\|_n^n=\int_0^1 f^*(t)^n\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}|f^*(t)|^n\,dt\ge\int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}}f^*(2^{-n})dt=2^{-n-1}f^*(2^{-n}),$$

откуда и следует требуемое неравенство. Но тогда при $\lambda = 4 ||| f |||_{L(\varphi,1)}$

$$\int_0^1 \varphi\left(\frac{f^*(t)}{\lambda}\right)dt \le \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2^{-n-1}}^{2^{-n}} \varphi\left(f^*(2^{-n-1})\frac{1}{\lambda}\right)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(f^*(2^{-n})\frac{1}{\lambda}\right)2^{-n} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{4 \| f \|_n}{\lambda}\right)2^{-n} \le 1.$$

Отсюда следует, что $\| f \|_{L(\varphi)} \le 4 ||| f |||_{L(\varphi,1)}$. Отметим, наконец [3, с. 123], что частичные суммы $S_m(f)$ ряда Фурье – Уолша удовлетворяют неравенству

$$\| S_m(f) \|_p \le Ap \| f \|_p \quad (p \ge 2).$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\| S_m(t) \| \frac{1}{n\lambda}\right)2^{-n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left((n+1)A\frac{\| f \|_{n+1}}{\lambda}\right)2^{-n} \le$$

$$\le 2\sum_{n=1}^{\infty} \varphi\left(\| f \|_n \, \psi(2^{-n})\frac{A}{\lambda}\right)2^{-n} \le 1 \text{ при } \lambda = 2A ||| f |||_{L(\varphi,\, \psi)},$$

где $\psi(x) = \log\frac{2}{x}$. Это означает, что $||| S_m(f) |||_{L(\varphi,1)} \le A ||| f |||_{L(\varphi,\, \psi)}$, отсюда с учетом ранее доказанного неравенства $\| g \|_{L(\varphi)} \le 4 ||| g |||_{L(\varphi,1)}$ следует

$$||| S_m(f) |||_{L(\varphi)} \le 8A ||| f |||_{L(\varphi,\, \psi)} \quad \left(\psi(x) = \log\frac{2}{x}\right),$$

и теорема доказана.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Finet C., Tkebuchavu G. E.* Walsh – Fourier series and their generalizations in Orlicz spaces // J. Mat. Anal. Appl. 1998. Vol. 221. P. 405 – 418.

2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 744 с.

3. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды преобразования Уолша. Теория и применения. М.: Наука, 1987. 344 с.