УДК 517.984

А. С. Луконина

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЁННЫМ ФУНКЦИЯМ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ*

В статье рассматривается оператор L:

$$l(y)=\beta y'(x)+y'(1-x)+p_1(x)y(x)+p_2(x)y(1-x) \qquad (1)$$

с интегральным граничным условием:

$$U(y)=\int_0^1 p(t)\,y(t)\,dt=0,\ p(t)=\frac{k(t)}{t^{\alpha}(1-t)^{\alpha}},\ 0<\alpha<1, \qquad (2)$$

где $\beta^2\neq 1$, $p_i(x)\in C^1[0,1]$, $(i=1,2)$; на $k(t)$ накладываются условия:

а) $k(t)\in C[0,1]\cap V[0,1]$;

б) $k^2(1)-\gamma^2 k^2(0)\neq 0$, $k^2(0)-\gamma^2 k^2(1)\neq 0$, где $\gamma=\beta-\sqrt{\beta^2-1}$.

Граничное условие схожего с (2) вида: $\int_{-1}^{1}\frac{k(t)}{(1-|t|)^{\alpha}}y(t)\,dt=0$ для оператора $y'(x)$ было впервые рассмотрено А. М. Седлецким. Оператор (1), (2) при $p_1(x)\equiv p_2(x)\equiv 0$ был подробно изучен А. П. Хромовым [1].

Для оператора (1), (2) устанавливается равносходимость разложений по собственным и присоединённым функциям (в дальнейшем – с.п.ф.) и в обычный тригонометрический ряд Фурье, а также аналог теоремы Жордана – Дирихле из теории тригонометрических рядов.

1. Резольвента оператора (1), (2). Обозначим через $R_\lambda f=(L-\lambda E)^{-1}f$, где E – единичный оператор, λ – спектральный параметр, резольвенту оператора L. Тогда $R_\lambda f$ есть первая компонента вектора $\Gamma z(x)$, $\Gamma=\begin{pmatrix}1 & \gamma\\ \gamma & 1\end{pmatrix}$, $z(x)$ – решение следующей краевой задачи в пространстве вектор-функций размерности два:

$$z'(x)+P_1(x)z(x)=\lambda Dz(x)+F_1(x),\ \widetilde{U}(z)=\int_0^1\begin{pmatrix}p(t) & 0\\ 0 & p(1-t)\end{pmatrix}\Gamma z(t)dt=0, \qquad (3)$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 03-01-000169).

где $D=\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$, $d=\dfrac{1}{\sqrt{\beta^2-1}}$, $P_1(x)=D\Gamma^{-1}\widetilde{P}(x)\Gamma$,

$\widetilde{P}(x)=\begin{pmatrix} p_1(x) & p_2(x) \\ p_2(1-x) & p_1(1-x) \end{pmatrix}$, $F_1(x)=D\Gamma^{-1}\widetilde{F}(x)$, $\widetilde{F}(x)=(f(x), f(1-x))^T$.

Присутствие ненулевой матрицы $P_1(x)$ является серьёзным препятствием в исследовании асимптотического поведения решения данной краевой задачи. Проведём преобразование системы (3), заменяющее $P_1(x)$ на матрицу с элементами $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$: $H(x,\lambda)=H_0(x)+\frac{1}{\lambda}H_1(x)$, где $H_0(x)$ – диагональная матрица с элементами $h_{ii}(x)=\exp\left(-\int\limits_0^x p_{ii}(t)dt\right)$, $p_{ii}(x)$ $(i=1,2)$ – диагональные элементы матрицы $P_1(x)$, $H_1(x)$ – кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения

$$H_0'(x)+P_1(x)H_0(x)+(H_1(x)D-DH_1(x))=0.$$

ЛЕММА 1. При больших $|\lambda|$ неособое преобразование $z=H(x,\lambda)v$ приводит (3) к следующей краевой задаче:

$$v'(x)+P_\lambda(x)v(x)=\lambda Dv(x)+F_\lambda(x),\quad \widetilde{\widetilde{U}}(v)=\widetilde{U}(H(x,\lambda)v)=0, \tag{4}$$

где $P_\lambda(x)=\dfrac{1}{\lambda}H^{-1}(x,\lambda)[H_1'(x)+P_1(x)H_1(x)]$, $F_\lambda(x)=H^{-1}(x,\lambda)F_1(x)$.

Обозначим через S_{δ_0} область, получающуюся из полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda d\geq 0$ удалением всех нулей функции $a_0+a_1e^{-\lambda d}+a_2e^{-2\lambda d}$, где

$$a_0=h_{11}(1)\cdot h_{22}(0)\cdot\left(k^2(1)-\gamma^2 k^2(0)\right),$$
$$a_1=(-1)^{\alpha-1}\left(1-\gamma^2\right)k(0)\cdot k(1)\left(h_{11}(0)\cdot h_{22}(0)+h_{11}(1)\cdot h_{22}(1)\right),$$
$$a_2=(-1)^{2(\alpha-1)}h_{11}(0)\cdot h_{22}(1)\cdot\left(k^2(0)-\gamma^2 k^2(1)\right),$$

вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0.

ЛЕММА 2. Пусть $w(x,\lambda)=R_{1\lambda}\Phi$ – решение краевой задачи: $w'(x)=\lambda Dw(x)+\Phi(x)$, $\widetilde{\widetilde{U}}(w)=0$, где $\Phi(x)=(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x))^T$, $\varphi_i(x)\in L[0,1]$, $(i=1,2)$. Тогда в области S_{δ_0} при больших $|\lambda|$ справедливы оценки:

$$\left\|R_{1\lambda}\Phi\right\|_\infty=O\left(\|\Phi\|_1\right),\ \left\|R_{1\lambda}\Phi\right\|_1=O\left(\psi(\lambda)\|\Phi\|_1\right),$$

где $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_\infty$ – нормы в пространстве вектор-функций размерности два $L_1[0,1]$ и $L_\infty[0,1]$ соответственно,

$\psi(\lambda)=\dfrac{1}{\operatorname{Re}\lambda d}\left(1-\left|e^{-\lambda d}\right|\right)$, $\left\|R_{1\lambda}\Phi\right\|_{C[\delta,1-\delta]}=O\left(e^{-\lambda d\delta}\|\Phi\|_1\right)$ для любого $\delta\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

Элементы матрицы P_λ допускают оценку $O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, следовательно, с учетом леммы 2 оператор $E + R_{1\lambda} P_\lambda$ обратим, а тогда краевая задача (4) в области S_{δ_0} имеет и притом единственное решение $v = \left(E + R_{1\lambda} P_\lambda\right)^{-1} R_{1\lambda} F_\lambda$. Окончательно получаем, что $R_\lambda f$ есть первая компонента вектора $\Gamma H(x,\lambda)\left(E + R_{1\lambda} P_\lambda\right)^{-1} R_{1\lambda} F_\lambda$.

2. Равносходимость разложений по с.п.ф. оператора L и в тригонометрический ряд Фурье. С использованием оценок для $R_{1\lambda}\Phi$ устанавливается утверждение, которое является ключевым моментом в доказательстве как теоремы равносходимости, так и аналога теоремы Жордана – Дирихле:

ЛЕММА 3. Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ справедливо соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \left\| \int_{|\lambda|=r} \Gamma H(x,\lambda)\left[\left(E + R_{1\lambda} P_\lambda\right)^{-1} R_{1\lambda} F_\lambda(x) - R_{1\lambda} H_0^{-1}(x) F_1(x)\right] d\lambda \right\|_\infty = 0.$$

Следствие. Если обозначить через $I(\lambda)$ первую компоненту вектора $\Gamma H(x,\lambda) R_{1\lambda} H_0^{-1}(x) F_1(x)$, то $\lim\limits_{r\to\infty} \max\limits_{0\le x\le 1} \left| \int_{|\lambda|=r} \left(R_\lambda(L) f - I(\lambda)\right) d\lambda \right| = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ и для любого $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ имеет место соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\delta\le x\le 1-\delta} \left| S_r(f,x) - \sigma_{r|d|}(f,x) \right| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ – частная сумма ряда Фурье по с.п.ф. оператора L для собственных значений, попавших в круг $|\lambda| < r$, $\sigma_{r|d|}(f,x)$ – частная сумма тригонометрического ряда Фурье по системе $\{\exp 2k\pi i x\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, для тех k, для которых $2|k|\pi < r|d|$, $d = \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - 1}}$.

3. Аналог теоремы Жордана – Дирихле о сходимости разложений по с.п.ф. оператора L. Имеет место

ТЕОРЕМА 2. Для $f(x) \in C[0,1] \cap V[0,1]$ и удовлетворяющей краевому условию $U(f) = 0$ выполняется соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \max_{0\le x\le 1} \left| f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} R_\lambda f \, d\lambda \right| = 0.$$

Соотношение $\lim\limits_{r\to\infty}\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} I(\lambda)\,d\lambda\right|=0$ доказывается, как и теорема 2 в [1], а из него и следствия к лемме 3 вытекает утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П.* Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАЕН. 2004. № 4. С. 80 – 87.

УДК 517.5

О. А. Лукьяненко

О КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВИЛЕНКИНА

Пусть $P=\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность простых чисел, $m=\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность целых чисел, где $m_0=1$, $m_{i+1}=p_i m_i$. Будем рассматривать функции Виленкина $V_n(x)$, $n\in\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$, на группе G_m [1], элементами которой являются бесконечные последовательности $x=(x_0,x_1,\ldots)$, $0\le x_k<p_k$, $x_k\in\mathrm{N}$ с групповой операцией $x\oplus y=((x_0+y_0)\bmod p_0,(x_1+y_1)\bmod p_1,\ldots)$, $x,y\in\mathrm{G}_m$. Группа G_m может быть отображена на отрезок [0,1] при помощи отображения $x\mapsto\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{x_j}{m_{j+1}}$.

Для каждого $k\in\mathbf{N}_0$, $x\in\mathbf{G}_m$ определим функции Радемахера равенством $r_k(x)=\exp(2\pi i x_k/p_k)$, $0\le x_k<p_k$. Если $n\in\mathbf{N}_0$, тогда для него существует единственное представление

$$n=\sum_{k=0}^{\infty}a_k m_k,\ \ 0\le a_k<p_k,\ \ a_k\in\mathbf{N}_0,\ \ k\in\mathbf{N}_0. \tag{1}$$

В этом случае $V_n(x)=\prod\limits_{K=0}^{\infty}r_k^{a_k}(x)$. Пусть $D_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}V_i(x)$ – ядро Дирихле [1, с. 98], $D_n^*(x)=V_{n^*}(x)D_n(x)$ – модифицированное ядро Дирихле, где $n^*=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i^* m_i$ – дополнительное число для n и $a_i^*=(p_i-a_i)\bmod m_i$.

Будем рассматривать представление числа $n\in\mathbf{N}_0$ в виде

$$n=\sum_{i=1}^{s}\left(a_{k_{2i-1}-1}m_{k_{2i-1}-1}+a_{k_{2i-1}-2}m_{k_{2i-1}-2}+\ldots+a_{k_{2i}}m_{k_{2i}}\right),$$
$$a_j=p_j-q_i,\ j=k_{2i-1}-1,\ k_{2i-1}-2,\ldots,\ k_{2i}. \tag{2}$$