Соотношение $\lim\limits_{r\to\infty}\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f(x)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r}I(\lambda)\,d\lambda\right|=0$ доказывается, как и теорема 2 в [1], а из него и следствия к лемме 3 вытекает утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П.* Об аналоге теоремы Жордана – Дирихле для разложений по собственным функциям дифференциально-разностного оператора с интегральным граничным условием // Докл. РАЕН. 2004. № 4. С. 80 – 87.

УДК 517.5

О. А. Лукьяненко

О КОНСТАНТАХ ЛЕБЕГА ДЛЯ СИСТЕМЫ ВИЛЕНКИНА

Пусть $P=\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность простых чисел, $m=\{m_i\}_{i=0}^{\infty}$ – последовательность целых чисел, где $m_0=1$, $m_{i+1}=p_i m_i$. Будем рассматривать функции Виленкина $V_n(x)$, $n\in\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$, на группе G_m [1], элементами которой являются бесконечные последовательности $x=(x_0,x_1,\ldots)$, $0\le x_k<p_k$, $x_k\in\mathrm{N}$ с групповой операцией $x\oplus y=((x_0+y_0)\operatorname{mod}p_0,(x_1+y_1)\operatorname{mod}p_1,\ldots)$, $x,y\in\mathrm{G}_m$. Группа G_m может быть отображена на отрезок $[0,1]$ при помощи отображения $x\mapsto\sum\limits_{j=0}^{\infty}\frac{x_j}{m_{j+1}}$.

Для каждого $k\in\mathbf{N}_0$, $x\in\mathbf{G}_m$ определим функции Радемахера равенством $r_k(x)=\exp(2\pi i x_k/p_k)$, $0\le x_k<p_k$. Если $n\in\mathbf{N}_0$, тогда для него существует единственное представление

$$n=\sum_{k=0}^{\infty}a_k m_k,\quad 0\le a_k<p_k,\quad a_k\in\mathbf{N}_0,\quad k\in\mathbf{N}_0. \tag{1}$$

В этом случае $V_n(x)=\prod\limits_{K=0}^{\infty}r_k^{a_k}(x)$. Пусть $D_n(x)=\sum\limits_{i=0}^{n-1}V_i(x)$ – ядро Дирихле [1, с. 98], $D_n^*(x)=V_{n^*}(x)D_n(x)$ – модифицированное ядро Дирихле, где $n^*=\sum\limits_{i=0}^{\infty}a_i^* m_i$ – дополнительное число для n и $a_i^*=(p_i-a_i)\operatorname{mod}m_i$.

Будем рассматривать представление числа $n\in\mathbf{N}_0$ в виде

$$n=\sum_{i=1}^{s}\left(a_{k_{2i-1}-1}m_{k_{2i-1}-1}+a_{k_{2i-1}-2}m_{k_{2i-1}-2}+\ldots+a_{k_{2i}}m_{k_{2i}}\right),$$
$$a_j=p_j-q_i,\ j=k_{2i-1}-1,\,k_{2i-1}-2,\ldots,\,k_{2i}. \tag{2}$$

В этом случае дополнительное число принимает вид

$$n^* = \sum_{i=1}^{s}\left(q_i m_{k_{2i-1}-1} + q_i m_{k_{2i-1}-2} + \ldots + q_i m_{k_{2i-1}-1}\right), \tag{3}$$

а для модифицированного ядра Дирихле можно записать следующее выражение:

$$D_n^*(x) = \sum_{i=1}^{s}\left(D_{m_{k_{2i-1}}}(x) - D_{m_{k_{2i-1}-1}}(x) \sum_{\nu=0}^{p_{k_{2i-1}-1}-a_{k_{2i-1}-1}-1} r_{k_{2i-1}-1}^{\nu}(x) + \right.$$

$$\left. + D_{m_{k_{2i}+1}}(x) - D_{m_{k_{2i}}}(x) \sum_{\nu=0}^{p_{k_{2i}}-a_{k_{2i}}-1} r_{k_{2i}}^{\nu}(x) \right). \tag{4}$$

При $q_i = 1,\ i = 1,\ldots,s$ равенство (4) принимает вид

$$D_n^*(x) = D_{m_{k_1}}(x) - D_{m_{k_2}}(x) + \ldots + D_{m_{k_{2s-1}}}(x) - D_{m_{k_{2s}}}(x). \tag{5}$$

ТЕОРЕМА. Пусть число n имеет вид (2), $L_n = \int_0^1 |D_n(t)|dt$ – константы Лебега для системы Виленкина [1, с. 98], тогда

$$\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{2q_i}{p_{k_{2i-1}-1}p_{k_{2i}}} + (q_i - 1)q_i \sum_{j=k_{2i-1}-1}^{k_{2i}} \frac{1}{p_j^2} \right) \le L_n \le V(n), \tag{6}$$

где $V(n) = a_0^* + \sum_{i=1}^{\infty}\left(a_i^* + a_{i-1}^*\right) \bmod 2d_i + \sum_{i=0}^{\infty} a_i^*\left(a_i^* - 1\right)$, $d_i = \max\left\{a_{i-1}^*, a_i^*\right\}$ (если $d_i = 0$, то $\left(a_i^* + a_{i-1}^*\right) \bmod 2d_i = \left(a_i^* + a_{i-1}^*\right)$).

Если последовательность $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ограничена числом p сверху, то

$$\frac{V(n)}{p^2} \le L_n \le V(n). \tag{7}$$

Доказательство. Учитывая свойства ядра Дирихле, оценим L_n сверху.

$$L_n = \int_0^1 \left|D_n^*(t)\right| dt \le \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^1 \left| D_{m_{k_{2i-1}}}(t) - D_{m_{k_{2i-1}-1}}(t) \sum_{\nu=1}^{q_i-1} r_{k_{2i-1}-1}^{\nu}(t) - \right.$$

$$\left. - D_{m_{k_{2i-1}-2}}(t) \sum_{\nu=1}^{q_i-1} r_{k_{2i-1}-2}^{\nu}(t) - \ldots - D_{m_{k_{2i}}}(t) \sum_{\nu=0}^{q_i-1} r_{k_{2i}}^{\nu}(t) \right| dt \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=k_{2i-1}-1}^{k_{2i}} \left(\frac{q_i^2 - 1}{q_i} + \frac{1}{q_i(q_i+1)^{j-k_{2i}}} \right) \le \sum_{i=1}^{s}\left(2q_i + (k_{2i-1} - k_{2i})(q_i - 1)q_i\right) \le V(n).$$

Обратно,

$$L_n=\int_0^1\left|D_n^*(t)\right|dt=\int_0^{\frac{1}{m_{k_1}}}\left|D_n^*(t)\right|+\sum_{j=k_1-1}^{k_2}\int_{\frac{1}{m_{j+1}}}^{\frac{1}{m_j}}\left|D_n^*(t)\right|dt+\sum_{i=2}^{s}\left(\int_{\frac{1}{m_{k_{2(i-1)}}}}^{\frac{1}{m_{k_{2i-1}}}}\left|D_n^*(t)\right|dt+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=k_{2i-1}}^{k_{2i}}\int_{\frac{1}{m_{j+1}}}^{\frac{1}{m_j}}\left|D_n^*(t)\right|dt\right)=A_1+\sum_{j=k_1-1}^{k_2}B_j+\sum_{i=2}^{s}\left(A_i+\sum_{j=k_{2i-1}}^{k_{2i}}B_j\right). \qquad (8)$$

Для $A_i,\ i=1,\ldots,s$, справедливо неравенство $A_i\geq\frac{1}{p_{k_{2i-1}-1}}$. Оценим слагаемые B_i.

$$B_i=\sum_{l=1}^{p_j-1}\int_{\frac{l}{m_{j+1}}}^{\frac{l+1}{m_{j+1}}}\left|-m_j\left(\left(r_j^l\right)^0+\ldots+\left(r_j^l\right)^{p_j-a_j-1}\right)+m_j-\ldots-m_{k_{2i}}\left(p_{k_{2i}}-a_{k_{2i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{t=i+1}^{s}\left(m_{k_{2t-1}}-m_{k_{2t-1}-1}\left(p_{k_{2t-1}-1}-a_{k_{2t-1}-1}\right)+\ldots+m_{k_{2t+1}}-m_{k_{2t}}\left(p_{k_{2t}}-a_{k_{2t}}\right)\right)\right|,$$

где $r_j^l=\exp\left(2\pi il/p_j\right)$, $j=k_{2i-1}-1,\ldots,k_{2i}$. Умножим подынтегральное выражение на $1=\left|\exp\left(2\pi il/p_j\right)\right|$, получим $B_j\geq\frac{c_j}{p_j}$, где $c_{k_{2i}}=q_i$, $c_j=q_i-1$ $\left(j=k_{2i-1},\ldots,k_{2i}+1\right)$. Таким образом, подставляя полученные результаты в (8), окончательно имеем

$$L_n=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{1}{p_{k_{2i-1}-1}}+\frac{1}{p_{k_{2i}}}+\sum_{j=k_{2i-1}-1}^{k_{2i}}\frac{q_i-1}{p_j}\right)\geq$$

$$\geq\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{2q_i}{p_{k_{2i-1}-1}p_{k_{2i}}}+\left(q_i-1\right)q_i\sum_{j=k_{2i-1}-1}^{k_{2i}}\frac{1}{p_j^2}\right).$$

В случае ограниченности последовательности $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ получим

$$L_n\geq\frac{2s}{p}+\sum_{i=1}^{s}\left(q_i-1\right)\frac{k_{2i-1}-k_{2i}}{p}\geq\sum_{i=1}^{s}\frac{2q_i}{p^2}+\sum_{i=1}^{s}\left(q_i-1\right)q_i\frac{k_{2i-1}-k_{2i}}{p^2}\leq V(n).$$

Теорема доказана.

Следствие. Если в представлении (2) $q_i=1,\ i=1,\ldots,s$, то неравенство (6) принимает вид $\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{p_{k_{2i-1}-1}p_{k_{2i}}}\leq L_n\leq 2s$.

Если последовательность $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ограничена числом p, то $\frac{2s}{p^2} \le L_n \le 2s$. В случае, когда $p_i = 2$, $i \in \mathbf{N}_0$, получаем известную оценку констант Лебега для системы Уолша [2, с. 34].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
2. *Schipp F., Wide W.R., Simon P.* Walsh series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest: Akademiai Kiado, 1990. 560 p.

УДК 517.984

Т. В. Мазур

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ*

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q(x),h)$:

$$ly := -y'' + q(x)y = \lambda y, x > 0, \tag{1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь λ – спектральный параметр. Через W_M, $M \ge 1$, обозначим множество функций $f(x)$, $x \ge 0$, таких, что $f^{(j)}(x) \in AC[0,T]$ при каждом фиксированном $T > 0$, $j = \overline{0, M-1}$, и $f^{(j)}(x) \in L(0,\infty)$, $j = \overline{0, M}$. Через W'_M обозначим множество функций $q(x) \in W_M$ таких, что $(1+x)|q(x)| \in L(0,\infty)$. Будем говорить, что $L \in V'_M$, если $q(x)$ и h вещественны и $q(x) \in W'_M$. Пусть далее $L \in V'_M$.

Пусть $\lambda = \rho^2$. Введём обозначения: $\Delta(\rho) = e'(0,\rho) - he(0,\rho)$, где $e(x,\rho)$ – решение Йоста уравнения (1). Для простоты положим далее, что дискретного спектра нет. При $\lambda = \rho^2 > 0$ рассмотрим функцию: $V(\lambda) := \rho\pi^{-1}|\Delta(\rho)|^{-2} > 0$.

Будем рассматривать задачу восстановления потенциала $q(x)$ и коэффициента h по функции $V(\lambda)$. Известно [1, с. 161], что $V(\lambda)$ непрерывна

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00007) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376).