Если последовательность $\{p_i\}_{i=0}^{\infty}$ ограничена числом p, то $\frac{2s}{p^2} \le L_n \le 2s$. В случае, когда $p_i = 2$, $i \in \mathbf{N}_0$, получаем известную оценку констант Лебега для системы Уолша [2, с. 34].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981. 180 с.
2. *Schipp F., Wide W.R., Simon P.* Walsh series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis. Budapest: Akademiai Kiado, 1990. 560 p.

УДК 517.984

Т. В. Мазур

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ*

Рассмотрим краевую задачу $L = L(q(x),h)$:

$$ly := -y'' + q(x)y = \lambda y, x > 0, \tag{1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь λ – спектральный параметр. Через W_M, $M \ge 1$, обозначим множество функций $f(x)$, $x \ge 0$, таких, что $f^{(j)}(x) \in AC[0,T]$ при каждом фиксированном $T > 0$, $j = \overline{0, M-1}$, и $f^{(j)}(x) \in L(0,\infty)$, $j = \overline{0,M}$. Через W'_M обозначим множество функций $q(x) \in W_M$ таких, что $(1+x)|q(x)| \in L(0,\infty)$. Будем говорить, что $L \in V'_M$, если $q(x)$ и h вещественны и $q(x) \in W'_M$. Пусть далее $L \in V'_M$.

Пусть $\lambda = \rho^2$. Введём обозначения: $\Delta(\rho) = e'(0,\rho) - he(0,\rho)$, где $e(x,\rho)$ – решение Йоста уравнения (1). Для простоты положим далее, что дискретного спектра нет. При $\lambda = \rho^2 > 0$ рассмотрим функцию: $V(\lambda) := \rho\pi^{-1}|\Delta(\rho)|^{-2} > 0$.

Будем рассматривать задачу восстановления потенциала $q(x)$ и коэффициента h по функции $V(\lambda)$. Известно [1, с. 161], что $V(\lambda)$ непрерывна

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00007) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376).

и при $\rho>0,\ \rho\to\infty$ $V(\lambda)=\dfrac{1}{\pi\rho}\left(1+\sum\limits_{s=1}^{M+1}\dfrac{V_S}{\rho^S}+o(\dfrac{1}{\rho^{M+1}})\right)$, где $V_{2S+1}=0$, $V_2=-0.5q(0)+h^2$.

Наряду с $L=L(q(x),h)$ будем рассматривать задачу $\widetilde{L}=L(\widetilde{q}(x),\widetilde{h})$ того же вида, но с другими коэффициентами. Положим, что если некоторый символ γ обозначает объект, относящийся к L, то $\widetilde{\gamma}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{L}$, а $\hat{\gamma}=\gamma-\widetilde{\gamma}$.

Пусть $h,\ q(0)$ априорно известны. Предположим $\Delta(0)\neq 0$. Выберем $\widetilde{L}=L(\widetilde{q}(x),\widetilde{h})$ так, что $\widetilde{V}_2=V_2$ (при $V_2>0$ положим $\widetilde{q}(x)=0$, $\widetilde{h}=\sqrt{V_2}$, при $V_2\le 0$ положим $\widetilde{h}=h$ и $\widetilde{q}(0)=q(0)$).

Пусть $\varphi(x,\lambda)$ – решение (1) при условиях: $\varphi(0,\lambda)=1,\varphi'(0,\lambda)=h$. Обозначим

$$D(x,\lambda,\mu)=\int\limits_0^x\varphi(t,\lambda)\varphi(t,\mu)\,dt,\quad \widetilde{D}(x,\lambda,\mu)=\int\limits_0^x\widetilde{\varphi}(t,\lambda)\widetilde{\varphi}(t,\mu)\,dt. \qquad (3)$$

При рассматриваемых условиях основное уравнение обратной задачи [1, с. 169] принимает вид $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\int\limits_0^\infty\widetilde{D}(x,\lambda,\mu)\hat{V}(\mu)\varphi(x,\mu)d\mu$, $\lambda>0$.

Обозначим $\varepsilon_0(x)=\int\limits_0^\infty\varphi(x,\mu)\widetilde{\varphi}(x,\mu)\hat{V}(\mu)d\mu$, $\varepsilon(x)=-2\varepsilon_0'(x)$.

Справедливы соотношения [1, с. 171]

$$q(x)=\widetilde{q}(x)+\varepsilon(x),\ h=\widetilde{h}-\varepsilon_0(0). \qquad (4)$$

Возьмём достаточно большое число $R_N>0$. Заменим интегралы $\int\limits_0^\infty$ на $\int\limits_0^{R_N}$, разобьём отрезок $[0,R_N]$ на n равных частей, каждая из которых равна h_ρ, т.е. $h_\rho=R_N n^{-1}$. Обозначим $R_k=kh_\rho$, $\lambda_k=R_k^2$. Определим функцию

$$\eta(x)=\begin{cases}-xh_\rho^{-1}+1, x\in[0,h_\rho);\\ xh_\rho^{-1}+1, x\in(-h_\rho,0);\\ 0, x\notin(-h_\rho,h_\rho).\end{cases}$$

Будем рассматривать семейство задач $L_k=L(q_k(x),h_k)$ и $\widetilde{L}_k=L(\widetilde{q}_k(x),\widetilde{h}_k)$, для которых верны равенства

$$V_k(\lambda)=\widetilde{V}(\lambda)+\sum_{j\le k}\nu_j\eta(\rho-R_j)\,,\ \ \widetilde{V}_k(\lambda)=\widetilde{V}(\lambda)+\sum_{j<k}\nu_j\eta(\rho-R_j),$$

где $k=\overline{1,n}$, $\nu_k=\hat{V}(\rho_k)$. Тогда $\hat{V}_k(\lambda)=\nu_k\eta(\rho-R_k)$, $k=\overline{1,n}$. Потенциал q_n, для которого $\widetilde{V}_n(\lambda)=\sum_{k=1}^{n}\nu_k\eta(\rho-R_k)$, $k=\overline{1,n}$, возьмём в качестве приближённого решения (1), (2). Тогда на отрезке $[R_{k-1},R_{k+1}]$, $k=\overline{1,n}$, $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ и $\varepsilon_0(x)$ имеют вид $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}}\widetilde{D}(x,\lambda,\mu)\hat{V}(\mu)\varphi(x,\mu)2\xi d\xi$,

$$\varepsilon_0(x)=\int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}}\varphi(x,\mu)\widetilde{\varphi}(x,\mu)\hat{V}(\mu)2\xi d\xi\,,\ \mu=\xi^2.$$

Заменим интегралы приближённо, используя квадратурную формулу прямоугольников с весом $\eta(\xi-\rho_k)$:

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\approx\varphi(x,\lambda)+\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_k)\nu_k\varphi(x,\lambda_k)2\lambda_k\int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}}\eta(\xi-\rho_k)\,d\xi,$$

$$\varepsilon_0(x)\approx\widetilde{\varphi}(x,\lambda_k)\nu_k\varphi(x,\lambda_k)2\lambda_k\int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}}\eta(\xi-\rho_k)\,d\xi.$$

Так как $\int_{R_{k-1}}^{R_{k+1}}\eta(\xi-\rho_k)d\xi=h_\rho$, то

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\approx\varphi(x,\lambda)+\widetilde{D}(x,\lambda,\lambda_k)\nu_k\varphi(x,\lambda_k)2\lambda_k h_\rho, \tag{5}$$

$$\varepsilon_0(x)\approx\widetilde{\varphi}(x,\lambda_k)\nu_k\varphi(x,\lambda_k)2\lambda_k h_\rho. \tag{6}$$

Положим $\lambda=\lambda_k$, тогда уравнение (5) перепишется в виде

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda_k)\approx\varphi(x,\lambda_k)+\widetilde{D}(x,\lambda_k,\lambda_k)\nu_k\varphi(x,\lambda_k)2\lambda_k h_\rho. \tag{7}$$

Получили линейное уравнение относительно $\varphi(x,\lambda_k)$. Таким образом, получаем следующий алгоритм решения обратной задачи.

Алгоритм. Пусть дана функция $V(\lambda)$.

1. Выбираем $\widetilde{q}(x)$, $\widetilde{h}$ такие, что выполняется условие $\widetilde{V}_2=V_2$.
2. При каждом фиксированном x в цикле по R_k:

- находим $\widetilde{D}(x,R_k,R_k)$ из (3),
- вычисляем $\widetilde{\varphi}(x,R_k)$ из задачи Коши
  $-\widetilde{\varphi}''(x,R_k)+\widetilde{q}(x)\widetilde{\varphi}(x,R_k)=R_k^2\widetilde{\varphi}(x,R_k)$, $\widetilde{\varphi}(0,R_k)=1$, $\widetilde{\varphi}'(0,R_k)=h$,
- считаем $\varphi(x,R_k)$ из (7),
- находим $\varepsilon_0(x)$ по формуле (6) и вычисляем $\varepsilon(x)=-2\varepsilon_0'(x)$,
- вычисляем потенциал $q(x)$ и коэффициент h из (4) и берём их за $\widetilde{q}(x)$ и $\widetilde{h}$ на следующем шаге.

3. Потенциал $q(x)$ и коэффициент h, полученные на выходе, являются приближением искомых $q(x)$ и h.

Приведённый метод имеет небольшое количество вычислений, так как на каждом шаге цикла решается одно единственное уравнение вместо системы с n неизвестными, а это уже объём вычислений порядка n для каждого x. Таким образом, данный метод является более эффективным, по сравнению с методами, основанными на применении оператора преобразования [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001. 499 с.

2. *Rundell W., Sacks P.E.* Reconstruction techniques for classical inverse St-L problems // Math. Comp. 1992. Vol. 58, № 197. P. 3 – 70.

УДК 517.51.518

И. Д. Молоденкова

ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРАМИ, СОХРАНЯЮЩИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СПЛАЙНЫ

Данная статья является продолжением статьи, опубликованной в предыдущем номере сборника, в которой были получены оценки приближения непрерывных функций операторами, сохраняющими кубические сплайны. Здесь получены оценки приближения непрерывных 2π-периодических функций операторами, сохраняющими тригонометрические сплайны по П.-Ж. Лорану.

Пусть A – интегральные осредняющие операторы

$$A_H(f;x)=\int_{-\pi}^{\pi}K_H(x,t)dt,$$

зависящие от шага разбиения $H=\dfrac{2\pi}{n+1}$ (n – натуральное число) как от параметра, сохраняющие тригонометрические сплайны, введенные П.-Ж. Лораном [1] с ядрами вида $K_H(x,t)=\sum_{i=1}^{S}\alpha_i(x)\varphi_i(t)$, где S принимает соответствующие значения в зависимости от того, куда попадает x, $\varphi_i(t)$ – линейно независимые функции, получаемые сдвигом функции $\varphi(t)$, где $\varphi(t)=\frac{1}{H}$, если $t\in[0,H]$ и 0 в остальных случаях, $\alpha_i(x)$ находятся из соответствующих систем линейных алгебраических уравнений [2, 3].