УДК 519.4

В. В. Розен

ОБ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОБОБЩЁННОГО КРИТЕРИЯ В ЗАДАЧАХ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

1. Ключевой проблемой теории многокритериальной оптимизации является проблема построения обобщенного критерия. Под *критериальным пространством* будем понимать произвольное множество D, на котором задано конечное число отображений $f_k : D \to C_k$, где C_k – некоторое линейно упорядоченное множество, упорядоченное порядком $\leq^k$ $(k \in K)$. Всякое такое отображение f_k называется *локальным критерием* (или *показателем качества*). На множестве D возникает отношение предпочтения ω, определенное условием

$$a_1 \leq^{\omega} a_2 \Leftrightarrow (\forall k \in K)\; f_k(a_1) \leq^k f_k(a_2). \qquad (1)$$

При отождествлении элементов, имеющих одинаковые показатели качества по всем критериям, отношение ω будет отношением порядка. Обобщенный критерий есть строго изотонное отображение φ упорядоченного множества $< D,\omega >$ в некоторую цепь C. Заметим, что для количественных критериев (когда C_k $(k \in K)$ и C есть цепь действительных чисел), отношение предпочтения ω становится предпочтением по Парето, а обобщенный критерий превращается в свертывание векторного критерия в скалярный. Нетрудно показать, что любое отношение порядка ω на множестве D может быть представлено формулой вида (1). Таким образом, с абстрактно-алгебраической точки зрения построение обобщенного критерия сводится к заданию строго изотонного отображения произвольного упорядоченного множества $< D,\omega >$ в некоторую цепь C.

Каждому обобщенному критерию φ соответствует линейный квазипорядок ρ_{φ}, определенный условием

$$a_1 \leq^{\rho_{\varphi}} a_2 \Leftrightarrow \varphi(a_1) \leq \varphi(a_2),$$

причем симметричная часть этого квазипорядка совпадает с ядром отображения φ.

<u>Определение 1.</u> Будем говорить, что два обобщенных критерия φ_1 и φ_2, заданные на упорядоченном множестве $< D,\omega >$, *естественно эквивалентны*, если $\rho_{\varphi_1} = \rho_{\varphi_2}$.

Для практических целей естественно эквивалентные обобщенные критерии могут быть отождествлены (так как они дают одинаковое «итоговое» линейное упорядочение множества D). Однако на практике существует, как правило, множество неэквивалентных между собой обобщенных критериев. Для обеспечения единственности обобщенного критерия (с точностью до естественной эквивалентности) необходимо произвести сужение класса обобщенных критериев. В данной статье такое сужение производится за счет задания дополнительной информации для обобщенного критерия – указания его ядра. Точнее, решается следующая задача: каким должно быть отношение эквивалентности ε на упорядоченном множестве, чтобы любые два обобщенных критерия, ядра которых совпадают с ε, были естественно эквивалентными между собой?

2. Для решения сформулированной задачи введем следующие два понятия.

Определение 2. Отношение эквивалентности ε на упорядоченном множестве $< D, \omega >$, а также соответствующее ему разбиение называется *картой*, если

a) на $< D, \omega >$ существует обобщенный критерий φ, ядро которого ε_{φ} совпадает с ε;

b) любые два обобщенных критерия φ_1, φ_2 на $< D, \omega >$, для которых $\varepsilon_{\varphi_1} = \varepsilon_{\varphi_2} = \varepsilon_{\varphi}$, естественно эквивалентны между собой.

Определение 3. Отношение эквивалентности $\varepsilon \subseteq D^2$ называется *стабильным* на упорядоченном множестве $< D, \omega >$, если фактор-отношение ω/ε является ацикличным.

Основной результат статьи дает следующая

ТЕОРЕМА. Для того чтобы отношение эквивалентности ε на упорядоченном множестве $< D, \omega >$ было картой, необходимо и достаточно, чтобы оно было максимальным по включению среди стабильных эквивалентностей, все классы которых – антицепи.

Схема доказательства. Пусть ε – карта на $< D, \omega >$. По условию *a*) существует на D обобщенный критерий φ, для которого $\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon$. Из условия изотонности отображения φ следует, что его ядро ε_{φ} стабильно, а из того, что φ строго изотонно, получаем, что классы ε_{φ} – антицепи. Остается проверить условие максимальности. В противном случае отношение порядка, являющееся транзитивным замыканием фактор-отношения ω/ε, не будет линейным на фактор-множестве D/ε. Поэтому найдутся два класса $C', C'' \in D/\varepsilon$, не сравнимых по указанному порядку. По теореме Шпильрайна существуют два таких линейных доупорядочения σ_1 и σ_2 данного порядка, что $C' <^{\sigma_1} C''$ и $C'' <^{\sigma_2} C'$. Пусть $\varphi_k : D \to D/\varepsilon$ – каноническое отображение D в цепь $< D/\varepsilon, \sigma_k > (k = 1, 2)$. Тогда $\varepsilon_{\varphi_1} = \varepsilon_{\varphi_2} = \varepsilon$, однако

$\rho_{\varphi_1} \neq \rho_{\varphi_2}$. Необходимость установлена. Доказательство достаточности основано на следующем вспомогательном утверждении.

ЛЕММА 1. Пусть ε – максимальное по включению среди стабильных эквивалентностей в $< D,\omega >$, все классы которых – антицепи. Тогда транзитивное замыкание фактор-отношения $\omega/_{\varepsilon}$ является линейным порядком на $D/_{\varepsilon}$, а каноническое отображение D на $D/_{\varepsilon}$ является обобщенным критерием, ядро которого совпадает с ε.

Возникает естественный вопрос о существовании карты для произвольного упорядоченного множества. Этот вопрос решается положительно. В самом деле, нетрудно убедиться, что в произвольном упорядоченном множестве $< D,\omega >$ любая цепь стабильных эквивалентностей, все классы которых – антицепи, имеет мажоранту (а именно мажорантой цепи $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ таких эквивалентностей является эквивалентность $\varepsilon = \bigcup_{i\in I} \varepsilon_i$). Отсюда по лемме Цорна следует существование максимальной стабильной эквивалентности $\overline{\varepsilon}$, все классы которой – антицепи. По доказанной теореме $\overline{\varepsilon}$ будет картой в упорядоченном множестве $< D,\omega >$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Подиновский В.В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982.
2. *Розен В. В.* Цель – оптимальность – решение. М.: Радио и связь, 1982.

УДК 517.927.25

В. С. Рыхлов

О ПОЛНОТЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПУЧКОВ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

Рассмотрим пучок обыкновенных дифференциальных операторов $L(\lambda)$, порожденный на конечном интервале $[0,1]$ дифференциальным выражением

$$l(y,\lambda) := \sum_{s+k=n} p_{sk}\lambda^s y^{(k)}, \quad p_{sk} \in \mathbf{C}, \quad p_{0n} \neq 0,$$

и линейно независимыми двухточечными краевыми условиями, которые считаем нормированными:

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).