Проверить, удовлетворяют или нет векторы V_j и W_j условию (α), позволяют следующие леммы из [2], которые приводятся в новой формулировке, учитывающей введенные обозначения.

ЛЕММА 1. Для фиксированного j $(1 \le j \le n)$ х.м. $M(V_j)$ содержится в выпуклой оболочке х.м. M_Δ и всех тех точек χ_{J_k}, для которых множество J_k содержит число j.

ЛЕММА 2. Для фиксированного j $(1 \le j \le n)$ х.м. $M(W_j)$ содержится в выпуклой оболочке х.м. M_Δ и всех тех точек χ_{J_k}, для которых множество J_k не содержит число j.

Имеются примеры простых пучков $L(\lambda)$, которые не являются нормальными по терминологии [2] (то есть теорема об n-кратной полноте системы их с.п.ф. в пространстве $L_2[0,1]$ из [2] здесь не имеет места), но, тем не менее, из сформулированных теорем вытекает n-кратная полнота в $L_2[0,1]$ системы их с.п.ф. Из-за ограниченности объема статьи эти примеры здесь не приводятся.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Шкаликов А. А.* Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. М., 1983. Т. 9. С. 190 – 229.

2. *Рыхлов В. С.* On completeness of eigenfunctions for pencils of differential operator // Spectral and Evolutional problems: Proceedings of the Seventh Crimean Autumn mathematical School-Symposium. Simferopol, 1997. Vol. 7. P. 70 – 73.

УДК 517.51

Л. В. Сахно

ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОГО ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ВЕСОВОГО КЛАССА С. Л. СОБОЛЕВА $W^l_{p,\sigma}$

В статье дана в терминах L_q-нормы характеристика весовых классов С. Л. Соболева $W^l_{p,\sigma}$.

Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n)$ – вектор с натуральными координатами, а G – область в $\mathbf{R}^n$ вида $G = \{x : x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, \varphi(x') < x_n < \infty\}$, где функция φ удовлетворяет уравнению Гельдера

$$|\varphi(x') - \varphi(y')|^{l_n} \le M \sum_{i=1}^{n-1} |x_i - y_i|^{l_i}$$

(очевидно, что при $l_j > l_n$ функция φ не зависит от x_j).

Для вещественных $p \geq 1$

$$\|f\|_{L_{p,\sigma}(G)} = \|\rho^{\sigma} f\|_{L_p(G)},$$

где вес ρ определен равенством

$$\rho(x) = \min[1, x_n - \varphi(x')].$$

Нетрудно проверить, что функция ρ в приграничной полосе эквивалентна обобщенному расстоянию

$$\rho(x, \partial G) = \inf_{y \in \partial G} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^{\frac{l_i}{l_n}}.$$

Положим

$$\|f\|_{L^l_{p,\sigma}(G)} = \sum_{i=1}^{n} \|D_i^{l_i} f\|_{L^l_{p,\sigma}(G)} \quad \text{и} \quad \|f\|_{W^l_{p,\sigma}(G)} = \|f\|_{L_{p,\sigma}(G)} + \|f\|_{L^l_{p,\sigma}(G)},$$

где $D_i^{l_i} f$, $i = 1, \ldots, n$, – обобщенные в смысле С. Л. Соболева производные порядка l_i по i-й переменной.

Пусть $1 < p < q < \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{l_i} \leq 1$. Известна [1] оценка

$$\|f\|_{L_{q,\gamma}(G)} \leq C \|f\|_{W^l_{p,\sigma}(G)},$$

где $\gamma = \sigma - l_n(1 - \kappa)$ и константа C не зависит от f. Другими словами, имеет место вложение

$$W^l_{p,\sigma}(G) \subset L_{q,\gamma}(G).$$

Определим так называемые (p,q)-модули.

Пусть $\nu \in \mathbf{Z}^n$, $r \in \mathbf{N}$, e_i – орт i-й координатной оси, $h > 0$. Положим

$$\mu^{re_i}_{p,q}(h; G; l; f) = \left\| \left\| \Delta_i^r(h; G) f\left(x + \nu h^{\frac{l_i}{l}}\right) \right\|_{l_p} \right\|_{L_q[h^{\frac{l_i}{l}}]},$$

где $\nu h^{\frac{l_i}{l}} = \left(\nu_1 h^{\frac{l_1}{l_1}}, \ldots, \nu_n h^{\frac{l_1}{l_n}}\right)$, $\|a_\nu\|_{l_p} = \left(\sum_\nu |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $L_q[h^{\frac{l_i}{l}}] = L_q\left(\prod_{j=1}^{n} (0, h^{\frac{l_i}{l_j}})\right)$,

$\Delta_i^r(h; G) f$ – разность порядка r по i-й переменной на множестве G.

Определим слои R_k^H $(H > 2)$ при натуральных k:

$$R_k^H = \{x : x \in G, H^{-k} < x_n - \varphi(x') < 2H^{-k+1}\}.$$

Заметим, что равномерно относительно k $\rho(x) \sim H^{-k}$ при $x \in R_k^H$. Обозначим

$$\|\mu^{re_i}_{p,q}(h; R_k^H; l; f)\|_{l_{p,\sigma}} = \|\mu^{re_i}_{p,q}(h; R_k^H; l; f) H^{-k\sigma}\|_{l_p}.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $1 < p < q < \infty$, $\kappa = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i} \le 1$, $\gamma = \sigma - l_n(1-\kappa)$.

Тогда эквивалентны

$$\|f\|_{L^l_{p,\sigma}(G)}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{0<h<h_0} h^{-l_i + l_i \kappa} \left\| \mu^{l_i e_i}_{p,q}(H^{-k\frac{l_n}{l_i}} h; R^H_k; l; f) \right\|_{l_{p,\gamma}},$$

причем из конечности второй полунормы следует существование указанных производных.

Замечание. Вторые полунормы в теореме при различных $H > 2$ эквивалентны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кочарли А. Ф.* Некоторые весовые теоремы вложения в область с негладкой границей // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 128 – 146.

УДК 517.51: 518

С. Ю. Советникова

О СКОРОСТИ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА*

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода:

$$Au \equiv \int_0^x \frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!} u(t)\,dt = f(x).$$

Пусть $u \in M \subset C[a,b]$, где $M = \{u(x) \in C[0,1] : u = A^* v, \|v\|_{L_2} \le 1\}$.

Для решения этого уравнения рассмотрим метод регуляризации нулевого порядка. В этом методе приближение к решению находится из уравнения

$$\alpha u_\alpha + A^* A u_\alpha = A^* f.$$

Известно, что $u_\alpha(x) \to u$ при $\alpha \to 0$ в метрике пространства $L_2[a,b]$ [1], а если $u \in R(A^*)$, то и в метрике пространства $C[a,b]$ [2].

Обозначим через R_α следующий оператор:

$$R_\alpha = (\alpha \mathrm{E} + A^* A)^{-1} A^* \ (\alpha > 0 - \text{параметр}).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).