ТЕОРЕМА. Пусть $1<p<q<\infty$, $\kappa=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}\le 1$, $\gamma=\sigma-l_n(1-\kappa)$.

Тогда эквивалентны

$$\|f\|_{L^l_{p,\sigma}(G)}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n}\sup_{0<h<h_0} h^{-l_i+l_i\kappa}\left\|\mu^{l_i e_i}_{p,q}(H^{-k\frac{l_n}{l_i}}h;R_k^H;l;f)\right\|_{l_{p,\gamma}},$$

причем из конечности второй полунормы следует существование указанных производных.

Замечание. Вторые полунормы в теореме при различных $H>2$ эквивалентны.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кочарли А. Ф.* Некоторые весовые теоремы вложения в область с негладкой границей // Тр. МИАН СССР. 1974. Т. 131. С. 128 – 146.

УДК 517.51: 518

С. Ю. Советникова

О СКОРОСТИ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА*

Рассмотрим интегральное уравнение первого рода:

$$Au\equiv\int_0^x\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}u(t)\,dt=f(x).$$

Пусть $u\in M\subset C[a,b]$, где $M=\{u(x)\in C[0,1]:u=A^*v,\|v\|_{L_2}\le 1\}$.

Для решения этого уравнения рассмотрим метод регуляризации нулевого порядка. В этом методе приближение к решению находится из уравнения

$$\alpha u_\alpha+A^*Au_\alpha=A^*f.$$

Известно, что $u_\alpha(x)\to u$ при $\alpha\to 0$ в метрике пространства $L_2[a,b]$ [1], а если $u\in R(A^*)$, то и в метрике пространства $C[a,b]$ [2].

Обозначим через R_α следующий оператор:

$$R_\alpha=(\alpha\mathrm{E}+A^*A)^{-1}A^*\ (\alpha>0-\text{параметр}).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

Операторы $R_\alpha A$ являются операторами, аппроксимирующими функцию $u(x)$. Введем в рассмотрение величину

$$\Delta_1(R_\alpha A, M) = \sup\{\|R_\alpha Au - u\|_C : u \in M\},$$

которая характеризует скорость аппроксимации функции $u(x)$ при применении операторов $R_\alpha A$.

ТЕОРЕМА. Справедливо представление

$$\Delta_1(R_\alpha A, M) = \max_x \left[\int_0^1 \left[\underbrace{\int_0^t \dots \int_0^t}_{m} \Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})dt\dots dt\right]^2 dt\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (1)$$

где $\Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})$ – функция Грина краевой задачи:

$$(-1)^m y^{(2m)} + \frac{1}{\alpha} y = \varphi,$$

$$y(1) = y'(1) = \dots = y^{(m-1)}(1) = y^{(m)}(0) = \dots = y^{(2m-1)}(0). \qquad (2)$$

Доказательство. Сначала получаем представление оператора $R_\alpha A$ в интегральном виде. Затем используем лемму из [3]:

ЛЕММА. Если K_α – интегральные операторы с ядрами $K_\alpha(x,\xi)$, такие, что $\|K_\alpha u - u\|_{C[a,b]} \to 0$ при $\alpha \to 0$ равномерно по

$$u(x) \in M = \{u(x) \in C[a,b] : u(x) = \int_a^b B(x,t)v(t)dt, \|v\|_{L_2[a,b]} \le 1\},$$

то справедливо представление

$$\Delta_1(K_\alpha, M) \equiv \sup\{\|K_\alpha u - u\|_{C[a,b]} : u \in M\} =$$

$$= \sup_{a \le x \le b} \left(\int_a^b \left(\int_a^b K_\alpha(x,\xi)B(\xi,t)d\xi - B(x,t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $K_\alpha(x,\xi)$ и $B(\xi,t)$ – ядра операторов $R_\alpha A$ и B соответственно.

Так как $A^{-1} = L$, где L – дифференциальный оператор:

$$y^{(m)} : y(0) = \dots = y^{(m-1)}(0),$$

а $Bv = \int_x^1 \frac{(t-x)^{m-1}}{(m-1)!} v(t)dt$, то отсюда получаем, что

$$R_\alpha Au = \frac{1}{\alpha}\int_0^1 \Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})u(t)dt,$$

где $\Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})$ – функция Грина краевой задачи (2).

Затем берем общий вид функции Грина дифференциального оператора из [4], при этом учитываем знак старшей производной в выражении (2). Проводим соответствующие выкладки, учитывая краевые условия, которым удовлетворяет функция Грина и следующие соотношения:

$$\int \Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})dt\Big|_{t=0} = \frac{1}{n\rho^{2m}}\Gamma^{(2m-1)}(x,0,-\frac{1}{\alpha}) = 0,$$

$$\iint \Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})dt\,dt\Big|_{t=0} = \frac{1}{n\rho^{2m}}\Gamma^{(2m-2)}(x,0,-\frac{1}{\alpha}) = 0,$$

...

$$\underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{m} \Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})dt\ldots dt\Big|_{t=0} = \frac{1}{n\rho^{2m}}\Gamma^{(m)}(x,0,-\frac{1}{\alpha}) = 0.$$

Таким образом, приходим к выражению (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т.153, № 1.С. 49 – 52.

2. *Хромова Г. В.* О регуляризации интегральных уравнений первого рода с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика. 1972. № 8(123). С. 94 – 104.

3. *Хромова Г. В.* О модулях непрерывности неограниченных операторов и оптимальности методов приближенного решения уравнений первого рода // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 133 – 135.

4. *Хромова Г. В.* Об оценке погрешности метода регуляризации Тихонова для интегральных уравнений с ядром Грина // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. 1992. № 4. С. 22 – 27.

УДК 517.518.82

Е. В. Сорина

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ ФИКСИРОВАННОЙ ШИРИНЫ

1. Пусть N – натуральное число, T – дискретная сетка вида $T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\}$, $\Phi(\cdot)$ – дискретное многозначное отображение с образами в виде отрезков $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, причём $y_{2,k} \ge y_{1,k}, \forall k \in [0:N]$. Пусть далее $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$, а $\Pi_n(A,t,r) = [p_n(A,t) - r, p_n(A,t) + r]$ – полиномиальная полоса, где r – фиксированное число. Обозначим через

$$f(A,k) = \max\{|p_n(A,t_k) + r - y_{2,k}|; |y_{1,k} - p_n(A,t_k) + r|\}.$$