Затем берем общий вид функции Грина дифференциального оператора из [4], при этом учитываем знак старшей производной в выражении (2). Проводим соответствующие выкладки, учитывая краевые условия, которым удовлетворяет функция Грина и следующие соотношения:

$$\int \Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})dt\Big|_{t=0} = \frac{1}{n\rho^{2m}}\Gamma^{(2m-1)}(x,0,-\frac{1}{\alpha}) = 0,$$

$$\iint \Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})dtdt\Big|_{t=0} = \frac{1}{n\rho^{2m}}\Gamma^{(2m-2)}(x,0,-\frac{1}{\alpha}) = 0,$$

$$\ldots$$

$$\underbrace{\int_0^t \ldots \int_0^t}_{m} \Gamma(x,t,-\frac{1}{\alpha})dt\ldots dt\Big|_{t=0} = \frac{1}{n\rho^{2m}}\Gamma^{(m)}(x,0,-\frac{1}{\alpha}) = 0.$$

Таким образом, приходим к выражению (1).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т.153, № 1.С. 49 – 52.

2. *Хромова Г. В.* О регуляризации интегральных уравнений первого рода с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика. 1972. № 8(123). С. 94 – 104.

3. *Хромова Г. В.* О модулях непрерывности неограниченных операторов и оптимальности методов приближенного решения уравнений первого рода // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. Вып. 7. С. 133 – 135.

4. *Хромова Г. В.* Об оценке погрешности метода регуляризации Тихонова для интегральных уравнений с ядром Грина // Вестн. Моск. ун-та. Сер.15. 1992. № 4. С. 22 – 27.

УДК 517.518.82

Е. В. Сорина

О ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПОЛОСОЙ ФИКСИРОВАННОЙ ШИРИНЫ

1. Пусть N – натуральное число, T – дискретная сетка вида $T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\}$, $\Phi(\cdot)$ – дискретное многозначное отображение с образами в виде отрезков $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, причём $y_{2,k} \ge y_{1,k}, \forall k \in [0:N]$. Пусть далее $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$, а $\Pi_n(A,t,r) = [p_n(A,t) - r, p_n(A,t) + r]$ – полиномиальная полоса, где r – фиксированное число. Обозначим через

$$f(A,k) = \max\{|p_n(A,t_k) + r - y_{2,k}|; |y_{1,k} - p_n(A,t_k) + r|\}.$$

Рассмотрим задачу

$$\rho(A) = \max_{k\in[0:N]} f(A,k) \to \inf_{A\in R^{n+1}}. \tag{1}$$

В задаче (1) требуется минимизировать наибольшее по всем $k \in [0:N]$ расстояние Хаусдорфа между образом многозначного отображения $\Phi(t_k)$ и соответствующим образом полиномиального отображения $\Pi_n(A,t,r)$ за счёт выбора вектора коэффициентов $A \in R^{n+1}$.

Далее будем также использовать обозначения

$$m = \max_{k\in[0:N]}\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2} - r\right|,\ M = \left\{k\in[0:N]: \left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2} - r\right| = m\right\},$$

$$\rho^* = \inf_{A\in R^{n+1}} \rho(A).$$

Очевидно, что для всех $k \in [0:N]$ справедливо неравенство

$$f(A,k) \ge \left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2} - r\right|.$$

Следовательно, $\max\limits_{k\in[0,N]} f(A,k) \ge \max\limits_{k\in[0,N]}\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2} - r\right|$, то есть

$$\rho(A) \ge m, \forall A \in R^{n+1}. \tag{2}$$

2. В данной статье ограничимся рассмотрением случая $N \le n$.

ТЕОРЕМА. Задача (1) эквивалентна линейной относительно компонент $(a_0, a_1, ..., a_n)$ вектора A системе уравнений

$$a_0 + a_1 t_k + ... + a_n t_k^n = \frac{y_{1,k}+y_{2,k}}{2} + \alpha_k\left(m - \left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2} - r\right|\right),\ k\in[0:N], \tag{3}$$

где $\alpha_k \in [-1;1]$, $\forall k \in [0:N]$. При этом $\rho^* = m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Сначала докажем, что решение системы (3) при любом наборе чисел $\alpha_k \in [-1;1]$, $k \in [0:N]$, является решением задачи (1). Как известно [1], определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & t_0 & t_0^{\,2} & \dots & t_0^{\,N} \\ 1 & t_1 & t_1^{\,2} & \dots & t_1^{\,N} \\ & & & \dots & \\ 1 & t_N & t_N^{\,2} & \dots & t_N^{\,N} \end{vmatrix} \ne 0.$$

Следовательно, система (3) всегда совместна.

Пусть A^* – решение системы (3) для некоторого набора $\alpha_k \in [-1;1]$, $k \in [0:N]$. Тогда, подставляя вместо $p_n(A^*, t_k)$ выражения из правой части системы (1), для функции $f(A^*, k)$ получим

$$f\left(A^*,k\right)=\max\left\{\frac{y_{1,k}-y_{2,k}}{2}+r+\alpha_k\left(m-\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|\right);\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r-\right.$$

$$-\alpha_k\left(m-\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|\right);\frac{y_{1,k}-y_{2,k}}{2}+r-\alpha_k\left(m-\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|\right);$$

$$\left.\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r+\alpha_k\left(m-\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|\right)\right\}\le\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|+$$

$$+\left|\alpha_k\right|\left(m-\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|\right)\le\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|+m-\left|\frac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|=m.$$

Установили, что $f\left(A^*,k\right)\le m, \forall k\in[0:N]$, и, следовательно, $\rho\left(A^*\right)\le m$. Тогда, учитывая неравенства (2), получаем $\rho\left(A^*\right)=m=\inf\limits_{A\in R^{n+1}}\rho(A)$. Таким образом, A^* – решение задачи (1) и $\rho^*=m$.

2. Докажем, что решение задачи (1) является решением системы (3) при некотором наборе чисел $\alpha_k\in[-1;1]$, $k\in[0:N]$. В пункте 1 доказано, что любое решение системы (3) при $\alpha_k\in[-1;1]$, $k\in[0:N]$, является решением задачи (1). Установлено, что система (3) всегда имеет решение. Следовательно, решение задачи (1) также существует, причём $\rho^*=m$.

Пусть теперь A^* – любое решение задачи (1). Покажем, что оно удовлетворяет системе (2) при следующем выборе параметров α_k:

$$\alpha_k=\begin{cases}0,\ k\in M,\\ \dfrac{p_n\left(A^*,t_k\right)-\dfrac{y_{1,k}+y_{2,k}}{2}}{m-\left|\dfrac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|},\ k\in[0:N]\setminus M.\end{cases}\qquad(4)$$

Так как $\rho^*=\rho\left(A^*\right)=m$, то $f\left(A^*,k\right)\le m, \forall k\in[0:N]$, а следовательно, и $\left|y_{2,k}-p_n\left(A^*,t_k\right)-r\right|\le m$, $\left|y_{1,k}-p_n\left(A^*,t_k\right)+r\right|\le m, \forall k\in[0:N]$. Из этих неравенств и правила выбора (4) вытекает, что $\alpha_k\in[-1;1]$, $\forall k\in[0:N]$. Подстановка параметров α_k в систему (3) обращает все её уравнения в тождества, то есть A^* удовлетворяет системе (3) при определённом выборе параметров α_k. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. При $N\le n$ задача (1) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $N=n$ и выполняются равенства $m=\left|\dfrac{y_{2,k}-y_{1,k}}{2}-r\right|$, $k\in[0:N]$, в остальных случаях задача имеет бесконечное множество решений.

3. Из теоремы вытекает, что решение задачи (1) при $N \le n$ сводится к решению системы неравенств

$$\left| a_0 + a_1 t_k + \ldots + a_n t_k^n - \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} \right| \le m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right|, k \in [0:N]. \qquad (5)$$

Множество решений каждого из неравенств (5) относительно компонентов вектора $A \in R^{n+1}$ определяет «слой» гиперплоскостей с общей нормалью $d_k = \left(1, t_k, \ldots, t_k{}^n\right)$. Если $k \in M$, то правая часть соответствующего неравенства из (4) обращается в нуль, и этот слой сжимается в одну гиперплоскость. Таким образом, множество решений задачи (1) является многогранным множеством размерности $N + 1 - |M|$.

Из приведённых рассуждений следует, что при условии $N < n$ множество решений задачи (1) не ограничено. Действительно, при $N < n$ в системе (3) оказываются свободными $N - n$ параметров, и их можно выбрать сколь угодно большими.

При $r = 0$ доказанная теорема соответствует результату И. Ю. Выгодчиковой [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.

2. *Выгодчикова И. Ю.* Наилучшее приближение многозначного отображения алгебраическим полиномом // Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2004. 112 с.

УДК 517.53

Г. А. Сорокин

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ЕЁ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Известно, что найти представление всех аналитических функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям $f^{(n)}(a_n) = A_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, в скольнибудь обозримом виде в общем случае трудно. Частные значения a_n рассмотрены в работах [1 – 3] и др.

В данной статье мы введем в рассмотрение обобщенные многочлены Тейлора:

$$P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(\theta, n) \frac{f^{(k)}(a_n)}{k!} (z - a_n)^k, \qquad (1)$$

где множители $\gamma_k(\theta, n)$ имеют вид

$$\gamma_k(\theta, n) = \left(1 - \theta^2\right)^{k+1} \sum_{l=0}^{n-k-1} C_{k+l}^l \theta^{2l}, \ (0 < \theta < 1); \qquad (2)$$