3. Из теоремы вытекает, что решение задачи (1) при $N \le n$ сводится к решению системы неравенств

$$\left| a_0 + a_1 t_k + \ldots + a_n t_k^n - \frac{y_{1,k} + y_{2,k}}{2} \right| \le m - \left| \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} - r \right|, k \in [0:N]. \qquad (5)$$

Множество решений каждого из неравенств (5) относительно компонентов вектора $A \in R^{n+1}$ определяет «слой» гиперплоскостей с общей нормалью $d_k = \left(1, t_k, \ldots, t_k{}^n\right)$. Если $k \in M$, то правая часть соответствующего неравенства из (4) обращается в нуль, и этот слой сжимается в одну гиперплоскость. Таким образом, множество решений задачи (1) является многогранным множеством размерности $N + 1 - |M|$.

Из приведённых рассуждений следует, что при условии $N < n$ множество решений задачи (1) не ограничено. Действительно, при $N < n$ в системе (3) оказываются свободными $N - n$ параметров, и их можно выбрать сколь угодно большими.

При $r = 0$ доказанная теорема соответствует результату И. Ю. Выгодчиковой [2].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Демьянов В. Ф., Малозёмов В. Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972. 368 с.
2. *Выгодчикова И. Ю.* Наилучшее приближение многозначного отображения алгебраическим полиномом // Автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. Саратов, 2004. 112 с.

УДК 517.53

Г. А. Сорокин

ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ЕЁ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Известно, что найти представление всех аналитических функций $f(z)$, удовлетворяющих условиям $f^{(n)}(a_n) = A_n$, $n = 0,1,2,\ldots$, в сколь-нибудь обозримом виде в общем случае трудно. Частные значения a_n рассмотрены в работах [1 – 3] и др.

В данной статье мы введем в рассмотрение обобщенные многочлены Тейлора:

$$P_{n-1}(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(\theta, n) \frac{f^{(k)}(a_n)}{k!}(z - a_n)^k, \qquad (1)$$

где множители $\gamma_k(\theta, n)$ имеют вид

$$\gamma_k(\theta, n) = \left(1 - \theta^2\right)^{k+1} \sum_{l=0}^{n-k-1} C_{k+l}^l \theta^{2l}, \ (0 < \theta < 1); \qquad (2)$$

θ – произвольное фиксированное число из (0;1). Заметим, что $\gamma_0 = 1 - \theta^{2n}$, $\gamma_{n-1} = \left(1 - \theta^2\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$. В силу этого удается получить достаточно широкий класс функций, для которых сходится последовательность (1).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция; θ $(0 < \theta < 1)$ – произвольное число. Справедлива формула

$$P_{n-1}(z) = f(z) - R_n(z), \tag{3}$$

где $P_{n-1}(z)$ – многочлены (1), а остаточный член $R_n(z)$ имеет вид

$$R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{f(t)}{t - z} \left(\theta^2 + \frac{(z - a_n)\left(1 - \theta^2\right)}{t - a_n} \right)^n dt, \tag{4}$$

C_n – простой спрямляемый замкнутый контур, внутри которого содержатся точки z и a_n.

Доказательство. Опираясь на интегральную формулу Коши, получим

$$f(z) - R_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{f(t)}{t - z} \left[1 - \left(\theta^2 + \frac{(z - a_n)\left(1 - \theta^2\right)}{t - a_n} \right)^n \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{\left(1 - \theta^2\right) f(t)}{t - a_n} \left[\left(1 + \theta^2 + \frac{\left(1 - \theta^2\right)(z - a_n)}{t - a_n} \right) + \left(\theta^2 + \frac{\left(1 - \theta^2\right)(z - a_n)}{t - a_n} \right)^2 + \ldots + \right.$$

$$\left. + \left(\theta^2 + \frac{\left(1 - \theta^2\right)(z - a_n)}{t - a_n} \right)^{n-1} \right] dt .$$

Пользуясь формулой бинома Ньютона, раскроем скобки и сгруппируем члены с одинаковыми степенями $z - a_n$, далее, выполнив интегрирование, получим

$$f(z) - R_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_n} \frac{f(t) \gamma_k(\theta, n)}{(t - a_n)^{k+1}} (z - a_n)^k \, dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_k(\theta, n) \frac{f^{(k)}(a_n)}{k!} (z - a_n)^k = P_{n-1}(z).$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Если $n(r)$ – функция плотности последовательности (a_n), $|a_n| = \rho_n$, $\rho_n \le \rho_{n+1}$, $a_i \ne a_k$, $i \ne k$, $\lim\limits_{n \to \infty} \rho_n = \infty$, $f(z)$ – целая функция с максимумом модуля $M(r)$ и неравенства

$$\ln M(r) < \lambda n(\theta r), \qquad \lambda < \ln \frac{1}{\theta} \tag{5}$$

при некотором фиксированном θ, $0<\theta<1$, будут выполнены для любого $r>r_0$, то в любом круге конечного радиуса последовательность полиномов (1) будет равномерно сходиться к $f(z)$.

Доказательство. В качестве контура C_n выберем окружность $|t|=\eta\rho_n$, где $\eta=\dfrac{1}{\theta}-\dfrac{1-\theta}{2\theta n}$. На этой окружности оценим по модулю (4).

Пусть R – сколь угодно большое фиксированное число. При $|z|\le R$ и $|t|=\eta\rho_n$ имеют место неравенства

$$|R_n(z)|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=\eta\rho_n}\frac{|f(t)|}{|t-z|}\left|\frac{t\theta^2-a_n+z\left(1-\theta^2\right)}{t-a_n}\right|^n|dt|; \tag{6}$$

$$|f(t)|\le M(\eta\rho_n). \tag{7}$$

При $\eta\rho_n\ge 2R$, т.е. при $n>n_1(R)$

$$\frac{1}{|t-z|}<\frac{1}{\eta\rho_n-R}<\frac{2}{\eta\rho_n}. \tag{8}$$

$$\left|\frac{t\theta^2-a_n+z\left(1-\theta^2\right)}{t-a_n}\right|=\left|\frac{t\theta^2-a_n}{t-a_n}\right|\left|1+\frac{z\left(1-\theta^2\right)}{t\theta^2-a_n}\right|.$$

При $|z|\le R$ и $|t|=\eta\rho_n$ имеют место очевидные неравенства:

$$\left|1+\frac{z\left(1-\theta^2\right)}{t\theta^2-a_n}\right|\le 1+\frac{R\left(1-\theta^2\right)}{\rho_n\left(1-\eta\theta^2\right)}<1+\varepsilon_1,\quad n>n_2(R,\varepsilon_1). \tag{9}$$

Далее, $|t|/|a_n|=\eta$, поэтому, полагая $t/a_n=\eta e^{\varphi_n i}$, получим:

$$\left|\frac{t\theta^2-a_n}{t-a_n}\right|=\theta\left|\frac{t\theta^2/a_n-1}{t\theta/a_n-\theta}\right|=\theta\left|\frac{\eta\theta^2e^{\varphi_n i}-1}{\eta e^{\varphi_n i}\theta-\theta}\right|.$$

Так как $\eta=1/\theta-\alpha_n$, где $\alpha_n=(1-\theta)/2\theta n$, то имеем

$$\left|\frac{\eta\theta^2e^{\varphi_n i}-1}{\eta e^{\varphi_n i}\theta-\theta}\right|=\left|\frac{\theta e^{\varphi_n i}-1}{e^{\varphi_n i}-1}\right|\left|\frac{1-\alpha_n\theta^2e^{\varphi_n i}/\left(\theta e^{\varphi_n i}-1\right)}{1-\alpha_n\theta e^{\varphi_n i}/\left(e^{\varphi_n i}-\theta\right)}\right|.$$

Первый множитель в первой части этого равенства равен 1; второй множитель при $n\to\infty$ стремится к единице, поэтому для сколь угодно малого $\varepsilon_2>0$ найдется $n_3(\varepsilon_2)$ такое, что при $n>n_3(\varepsilon_2)$ выполняются неравенства

$$\left|\frac{\eta\theta^2e^{\varphi_n i}-1}{\theta\eta e^{\varphi_n i}-\theta}\right|<1+\varepsilon_2;\qquad\left|\frac{t\theta^2-a_n}{t-a_n}\right|<\theta(1+\varepsilon_2).$$

Отсюда и из (9) получаем оценку

$$\left|\frac{t\theta^2-a_n+z\left(1-\theta^2\right)}{t-a_n}\right|^n\le\theta^n(1+\varepsilon_1)^n(1+\varepsilon_2)^n,\quad n>\max(n_1,n_2). \tag{10}$$

Из (7) – (10) следует неравенство

$$|R_n(z)| \le 2\exp(\ln M(\eta\rho_n) + n(\ln\theta + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)),$$

справедливое при $n > \max(n_1, n_2, n_3) = n_0$.

Вследствие того, что $\eta\theta < 1$, имеем $n(\eta\theta\rho_n) < n$. Отсюда в силу (5) получаем оценку $\ln M(\eta\rho_n) < \lambda n(\eta\theta\rho_n) < \lambda n$.

Таким образом, имеем

$$|R_n(z)| < 2\exp\left(n\left(\lambda - \ln\frac{1}{\theta} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2\right)\right). \qquad (11)$$

Так как ε_1 и ε_2 сколь угодно малы, и $\lambda - \ln\frac{1}{\theta} < 0$, то неравенство (11), справедливое при любом $n > n_0$, доказывает равномерную сходимость последовательности многочленов (1) к $f(z)$ в круге $|z| \le R$. Теорема доказана.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей. М.: Физматгиз, 1959. 375 с.
2. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. М.: Гостехиздат, 1954. 327 с.
3. *Гончаров В. Л.* Интерполяционные процессы и целые функции // УМН. 1937. Вып. 3. С. 135 – 156.

УДК 517.5

П. А. Терехин

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОСРЕДСТВОМ ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГА ПОДПРОСТРАНСТВ В $L_2(\mathbf{R}^d)$*

Пусть $\varphi \in L_2(\mathbf{R}^d)$. Обозначим $V(\varphi) = \overline{span}\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbf{Z}^d\}$ – замыкание по L_2-норме линейной оболочки системы целочисленных сдвигов функции φ. Подпространство $V(\varphi)$ называется *инвариантным относительно сдвига подпространством, порожденным функцией* φ. Для каждого $j = 0, 1, 2, \ldots$ положим $V_j = D^j V(\varphi)$ – образ подпространства $V(\varphi)$ при действии j-й степени оператора $Df(x) = 2^{d/2} f(2x)$. Вопросы приближения в метрике L_2 функций f из пространства Соболева $W_2^m(\mathbf{R}^d)$ и про-

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых кандидатов наук (проект МК-2569.2005.1), РФФИ (проект 03-01-00390), гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и программы «Университеты России» (проект ур. 04.01.374).