3. *Filippov V. I., Oswald P.* Representation in L_p by series of translates and dilates of one function // J. Approx. Theory. 1995. Vol. 82. P. 15 – 29.

4. *Терехин П. А.* Сжатия и сдвиги функции с ненулевым интегралом // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат ун-та, 1999. Вып. 1. С. 67 – 68.

5. *Терехин П. А.* Фреймы в банаховом пространстве и их приложения к построению всплесков // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат ун-та, 2003. Вып. 2. С. 65 – 81.

УДК 517.51

А. Ю. Трынин

ОБ ОЦЕНКЕ АППРОКСИМАЦИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМ ОПЕРАТОРОМ ПО СИНКАМ*

Начиная с известной теоремы Крамера [1], на стыке спектральной теории дифференциальных операторов и конструктивной теории функций появился ряд интересных работ, посвящённых различным направлениям обобщения классической теоремы Котельникова. В процессе этих исследований получены различные представления целых функций рядами, в основу конструкции которых положен принцип построения интерполяционного оператора Лагранжа. Много серьёзных результатов получено методом контурного интегрирования как для действительных [2 – 5], так и для комплексных [6 – 8] узлов интерполирования, удовлетворяющих некоторым условиям "равномерности распределения". Изучается также связь между этими "sampling" теоремами и интерполяцией Лагранжа по узлам из спектра задачи Штурма – Лиувилля, например [9]. В статье получена теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть $f \in AC(K_\varepsilon)$, то есть f – аналитическая, непрерывная вплоть до границы, в круге $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| < \pi/2 + \varepsilon\}$ функция, для некоторого положительного ε. Тогда найдётся такое натуральное n_ε, зависящее только от ε, что для всех $n > n_\varepsilon$ и $x \in [0, \pi]$

$$\left| L_n(f,x) - f(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin(nx)}{(nx - k\pi)} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f(x) \right| \le$$

$$\le \left(\ln \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} + 2\right) \frac{\|f\| \, |\sin(nx)|}{n\left(\pi\left(\frac{n+1}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right)}, \qquad (1)$$

где $\|f\| = \max\limits_{x \in K_\varepsilon} |f(x)|$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1) и РФФИ (проект 04-01-00060).

Доказательство. Обозначим

$$x_{k,n} = \frac{k\pi}{n},\ \ k = 0,1,\dots,n,\dots,\ \ \omega_n = \prod_{k=0}^{n}(x - x_{k,n}).$$

Тождественно преобразуем левую часть (1)

$$|L_n(f,x) - f(x)| =$$

$$= \frac{|\sin nx|}{|\omega_n(x)|}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\omega_n(x_{k,n})}{\sin(nx_{k,n})} - \frac{\omega_n(x)}{\sin(nx)}f(x)\right|. \qquad (2)$$

При каждом натуральном n оценим уклонение интерполяционного многочлена Лагранжа от интерполируемой функции $\frac{\omega_n(x)}{\sin(nx)}f(x)$ по формуле Эрмита [10]. В качестве контура интегрирования возьмём окружность Γ_n с центром в $\frac{\pi}{2}$ радиуса $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$. Эта окружность при каждом n охватывает $n+1$ узел $x_{k,n}$, $k = 0,1,\dots,n$. Так как $x \in [0,\pi]$, то из (2) следует

$$\frac{|\sin nx|}{|\omega_n(x)|}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{\omega_n(x)}{\omega'_n(x_{k,n})(x - x_{k,n})}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\frac{\omega_n(x_{k,n})}{\sin(nx_{k,n})} - \frac{\omega_n(x)}{\sin(nx)}f(x)\right| \le$$

$$\le \left|\frac{|\sin nx|}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{f(\xi)}{(\xi - x)\sin(n\xi)}d\xi\right| \le \frac{\|f\||\sin(nx)|}{2\pi}\int_{\Gamma_n}\left|\frac{1}{(\xi - x)\sin(n\xi)}d\xi\right|. \qquad (3)$$

Сделав замену $\xi = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)e^{i\phi}$, с помощью неравенства (3) оценим интеграл (2), учитывая, что

$$\min_{\phi\in[0,2\pi]}\left|\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}\right)e^{i\phi} - \left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right| = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|,$$

$$|L_n(f,x) - f(x)| \le$$

$$\le \frac{|\sin nx|}{4n}\frac{\|f\|(n+1)}{\left(\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|}\int_0^{2\pi}\frac{d\phi}{\left|\sin\frac{\pi n}{2}\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right) + \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right)\right|}. \quad (4)$$

В зависимости от чётности n оценка распадается на два случая.

Обозначим $\chi_n(\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{\left|\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right)\right|}, & \text{при } n \text{ нечётных} \\ \hline \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right)\right|}, & \text{при } n \text{ чётных} \end{cases}$. Тогда

$$\left|L_n(f,x)-f(x)\right| \le \frac{|\sin nx|}{4n}\frac{\|f\|(n+1)}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)-\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}\int_0^{2\pi}\chi_n(\phi)\,d\phi. \tag{5}$$

Рассмотрим случай $n=2m+1,\ m=0,1,2\ldots$ Пусть $A>2$. Обозначим через $\delta_m=\frac{1}{4(m+1)}\ln\frac{A}{A-2}$. Выберем m_0 настолько большим, чтобы для любого натурального $m>m_0$ $\delta_m\in[0,\frac{\pi}{2}]$.

$$\int_0^{2\pi}\chi_{2m+1}(\phi)d\phi \le 4\int_0^{\delta_m}\frac{d\phi}{|\cos(\pi(m+1)\cos\phi)|}+4\int_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{|sh(\pi(m+1)\sin\phi)|}. \tag{6}$$

Найдётся такое натуральное $m_1>m_0$, что неравенство

$$|\cos(\pi(m+1)\cos\phi)|\ge\frac{1}{2} \tag{7}$$

будет выполняться для любых $m>m_1$ и $\phi\in[0,\delta_m]$. Нетрудно проверить, что, если $\phi\ge\delta_m=\frac{1}{4(m+1)}\ln\frac{A}{A-2}$, $A>2$, то $\mathrm{sh}(\pi(m+1)\sin\phi)\ge\frac{e^{\pi(m+1)\sin\phi}}{A}$. Поэтому можно утверждать, что для второго интеграла в (5) справедливо неравенство $\int_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{sh(\pi(m+1)\sin\phi)}\le A\int_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{e^{-\pi(m+1)\sin\phi)}}\le\frac{\sqrt{A(A-2)}}{2(m+1)}$. Отсюда, а также из (5), (6) и (7) для любого $x\in[0,\pi]$ и нечётного $n>n_0=2m_1+1$ получаем

$$\left|L_n(f,x)-f(x)\right|\le\frac{|\sin nx|}{n}\frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)-\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}\left(\ln\frac{A}{A-2}+\sqrt{A(A-2)}\right).$$

В случае чётного $n=2m$, $m=0,1,2,\ldots$, проведя аналогичные рассуждения, для достаточно больших чётных n получим

$$\left|L_n(f,x)-f(x)\right|\le\frac{|\sin nx|}{n}\frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)-\left|x-\frac{\pi}{2}\right|}\left(\ln\frac{A}{A-2}+(A(A-2))^{\frac{1}{4}}\right).$$

Окончательно, в силу того что

$$\min_{A>2}\max\left(\left(\ln\frac{A}{A-2}+\sqrt{A(A-2)}\right),\left(\ln\frac{A}{A-2}+(A(A-2))^{\frac{1}{4}}\right)\right)=2+\ln\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1},$$

получаем утверждение теоремы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kramer H. P.* A generalized sampling theorem // J. Math. Phus. 1959. Vol. 38. P. 68 – 72.

2. *Butzer P. L., Hinsen G.* Reconstruction of bounded signals from pseudo-periodic, irregularly spaced samples // Signal Process. 1989. Vol. 17. P. 1 – 17.

3. *Higgins J. R.* Sampling theorems and contour integral method // Appl. Anal. 1991. Vol. 41. P. 155 – 169.

4. *Hinsen G.* Irregular sampling of bandlimited L^p-functions // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 72. P. 346 – 364.

5. *Seip K.* An irregular sampling theorem for functions bandlimited in a generalized sense // SIAM J. Appl. Math. 1987. Vol. 47, № 5. P. 1112 – 1116.

6. *Higgins J. R.* A sampling thorem for irregulary spaced sample points // IEEE Trans. Inform. Theory. 1976. Vol. 22. P. 621 – 622.

7. *Young R.M.* An Introduction to Nonharmonic. Fourier Series. N. Y.: Academic Press, 1980.

8. *Voss J. J.* A Sampling Theorem with Nonuniform Complex Nodes // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90. P. 235 – 254.

9. *Zayed A. I., Hinsen G., Butzer P. L.* On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems // SIAM. J. Appl. Math. 1990. Vol. 50, № 3. P. 893 – 909.

10. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука,1964.

УДК 517.984

В. А. Халова

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, ДОПУСКАЮЩИМИ РАЗРЫВЫ ПРОИЗВОДНЫХ НА ДИАГОНАЛЯХ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор вида

$$Af(x)=\alpha_1\int_0^x A(x,t)f(t)dt+\alpha_2\int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt+\sum_{k=1}^m (f,v_k)g_k(x), \qquad (1)$$

где $A(x,t)=\dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, $\beta=\alpha_1^2-\alpha_2^2\neq 0$, $v_k(t)\in C^n[0,1]$, $g_k(x)\in C^n[0,1]$, $\left\{v_k^{(n)}(t)\right\}_1^m$ и $\left\{g_k^{(n)}(x)\right\}_1^m$ линейно независимые, $(f,v_k)=\int_0^1 f(t)v_k(t)dt$.

Оператор (1) является одним из представителей операторов вида

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).