БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Kramer H. P.* A generalized sampling theorem // J. Math. Phus. 1959. Vol. 38. P. 68 – 72.

2. *Butzer P. L., Hinsen G.* Reconstruction of bounded signals from pseudo-periodic, irregularly spaced samples // Signal Process. 1989. Vol. 17. P. 1 – 17.

3. *Higgins J. R.* Sampling theorems and contour integral method // Appl. Anal. 1991. Vol. 41. P. 155 – 169.

4. *Hinsen G.* Irregular sampling of bandlimited L^3-functions // J. Approx. Theory. 1993. Vol. 72. P. 346 – 364.

5. *Seip K.* An irregular sampling theorem for functions bandlimited in a generalized sense // SIAM J. Appl. Math. 1987. Vol. 47, № 5. P. 1112 – 1116.

6. *Higgins J. R.* A sampling thorem for irregulary spaced sample points // IEEE Trans. Inform. Theory. 1976. Vol. 22. P. 621 – 622.

7. *Young R.M.* An Introduction to Nonharmonic. Fourier Series. N. Y.: Academic Press, 1980.

8. *Voss J. J.* A Sampling Theorem with Nonuniform Complex Nodes // J. Approx. Theory. 1997. Vol. 90. P. 235 – 254.

9. *Zayed A. I., Hinsen G., Butzer P. L.* On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems // SIAM. J. Appl. Math. 1990. Vol. 50, № 3. P. 893 – 909.

10. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука,1964.

УДК 517.984

В. А. Халова

О РАВНОСХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ЯДРАМИ, ДОПУСКАЮЩИМИ РАЗРЫВЫ ПРОИЗВОДНЫХ НА ДИАГОНАЛЯХ*

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрим интегральный оператор вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A(x,t) f(t)dt + \alpha_2 \int_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)dt + \sum_{k=1}^{m} (f, v_k) g_k(x), \qquad (1)$$

где $A(x,t) = \dfrac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$, $\beta = \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \neq 0$, $v_k(t) \in C^n[0,1]$, $g_k(x) \in C^n[0,1]$,

$\left\{v_k^{(n)}(t)\right\}_1^m$ и $\left\{g_k^{(n)}(x)\right\}_1^m$ линейно независимые, $(f, v_k) = \int_0^1 f(t) v_k(t) dt$.

Оператор (1) является одним из представителей операторов вида

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

$$Af(x)=\alpha_1\int_0^x A_1(x,t)f(t)dt+\alpha_2\int_x^1 A_2(x,t)f(t)dt+$$
$$+\alpha_3\int_0^{1-x} A_3(1-x,t)f(t)dt+\alpha_4\int_{1-x}^1 A_4(1-x,t)f(t)dt,$$

которые впервые были рассмотрены А. П. Хромовым. Путем несложных преобразований за счет конечномерного добавка четыре слагаемых в нашем случае удается свести к двум. Для оператора (1) при $n=1$ теоремы равносходимости были получены А. П. Хромовым [1]. Затем в работе [2] им совместно с В. В. Корневым была получена теорема равносходимости для оператора (1) без конечномерного возмущения, но с более сложным ядром $A(x,t)$. На основе этой работы в [3] автором была получена аналогичная теорема для оператора (1) при $n=2$. В данной статье обобщается результат [3]. Важным достоинством оператора (1) является то, что для него условия существования обратного оператора выписываются в явном виде [4]. Кроме того, в каждом конкретном случае условия регулярности можно просто сосчитать. Эти условия (существование A^{-1} и регулярность условий) являются необходимыми для получения теоремы равносходимости и, вообще говоря, трудно проверяемыми.

Пусть n – четное и

$$\Delta=\det|\gamma_{jk}|\neq 0, \tag{2}$$

где $\gamma_{jk}=D^{\mu_j}Tg_k(0)$, $j=1,\dots,m_0$, $0\le\mu_1<\mu_2<\dots<\mu_{m_0}\le n-1$, $\gamma_{jk}=\delta_{k\nu_j}+(Lg_k,v_{\nu_j})$, $j=m_0+1,\dots,m$, $1\le\nu_{m_0+1}<\nu_{m_0+2}<\dots<\nu_m\le m$, m_0 – фиксированное целое число, $0\le m_0\le m$, $D=\frac{d}{dx}$, $T=\alpha_1E-\alpha_2S$, E – единичный оператор, $Sf(x)=f(1-x)$, $L=\frac{1}{\beta}D^nT$, δ_{kj} – символ Кронекера. Тогда оператор $A^{-1}y(x)$ существует, и $y(x)$ удовлетворяет условиям

$$a_iy^{(\sigma_i)}(0)+b_iy^{(\sigma_i)}(1)+\sum_{j=0}^{\sigma_i-1}\left[a_{ij}y^{(j)}(0)+b_{ij}y^{(j)}(1)\right]=(y,\varphi_i),\ \ i=1,\dots,n, \tag{3}$$

$0\le\sigma_1\le\dots\le\sigma_n\le n-1$, $\sigma_i<\sigma_{i+2}$, $|a_i|+|b_i|>0$, $\varphi_i\in C[0,1]$.

Считаем, что условия (3), представляющие собой условия из теоремы 2 [4], приведенные к нормированному виду, регулярны по Биркгофу.

Обозначим через ω_i корни n-й степени из 1, $d^n=\dfrac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2}$, λ – спектральный параметр. Положим $\lambda=\rho^n$ и разобьем область $0\le\arg\rho\le2\pi/n$ на секторы $\gamma_{j-1}\le\arg\rho\le\gamma_j$, $j=1,\dots,N$ $(0=\gamma_0<\dots<\gamma_N=2\pi/n)$ таким образом, что числа $\omega_i,d\omega_i$ $(i=1,\dots,n)$ можно перенумеровать через $\tilde\omega_k$

$(k=1,\dots,2n)$ так, чтобы при любых ρ из рассматриваемого сектора выполнялось $\operatorname{Re}\rho\widetilde{\omega}_k \ge 0$, $k=1,\dots,n$, $\operatorname{Re}\rho\widetilde{\omega}_k \le 0$, $k=n+1,\dots,2n$. Пусть

$$\theta = \det\left|p_{jk}\widetilde{\omega}_k^{\sigma_j}\right|_{j,k=1}^{n} \neq 0, \qquad (4)$$

где $p_{jk}=a_j+(-1)^j b_j$, если $\widetilde{\omega}_k=\omega_i$, $p_{jk}=a_j-(-1)^j b_j$, если $\widetilde{\omega}_k=d\omega_i$.

Обозначим $S_{\delta_0}=\bigcup\limits_{j=1}^{N} S_{\delta_0,j}$, где $S_{\delta_0,j}$ – область, получающаяся из сектора $\gamma_{j-1}\le\arg\rho\le\gamma_j$ удалением всех нулей многочлена

$$a_{0,j}+a_{1,j}e^{-2\rho\widetilde{\omega}_n}+a_{2,j}e^{-\rho(\widetilde{\omega}_{n-1}+\widetilde{\omega}_n)}+a_{3,j}e^{-2\rho\widetilde{\omega}_{n-1}}+a_{4,j}e^{-2\rho(\widetilde{\omega}_{n-1}+\widetilde{\omega}_n)},$$

где $a_{0,j}=\pm\theta^2$, $a_{4,j}=\pm\theta^2$, вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ_0. Удалим из области S_{δ_0} еще точки ρ_k, $k=1,2,\dots$ вместе с круговыми окрестностями того же радиуса δ_0, для которых $(\alpha_1+\alpha_2)\rho_k^n$ или $(\alpha_1-\alpha_2)\rho_k^n$ являются собственными значениями краевой задачи

$$y^{(n)}(x)-\lambda y(x)=0, \quad y^{(j)}(0)=y^{(j)}(1), \ \ j=1,\dots,n,$$

где $y(x)$ – скалярная функция, и для оставшейся области сохраним обозначение S_{δ_0}.

ТЕОРЕМА. Если $g_k^{(n)}(x)\in C[0,1]\cap V[0,1]$ и выполняются условия (2) и (4), то для любой $f(x)\in L[0,1]$ и любого $\delta\in(0,1/2)$ имеет место равенство

$$\lim_{r\to\infty}\max_{\delta\le x\le 1-\delta}\left|S_r(f,x)-\frac{1}{2}\sigma_{r|d_1|}(f+g,x)-\frac{1}{2}\sigma_{r|d_2|}(f-g,x)\right|=0,$$

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье функции $f(x)$ по с.п.ф. оператора A для тех характеристических чисел λ_k, для которых $|\lambda_k|<r$; $\sigma_r(f,x)$ – частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ для тех номеров k, для которых $(2k\pi)^n<r$; $g(x)=f(1-x)$, r таково, что $\{\rho:|\rho|^n=r,\ 0\le\arg\rho\le 2\pi/n\}\subset S_{\delta_0}$, $d_1=\alpha_1+\alpha_2$, $d_2=\alpha_1-\alpha_2$.

Замечание. Условие (5) не зависит от выбора сектора, в котором нумеруются $\widetilde{\omega}_k$.

СЛЕДСТВИЕ. Если $f(x)\in L[0,1]$ и $f(x)=f(1-x)$, то

$$\lim_{r\to\infty}\max_{\delta\le x\le 1-\delta}\left|S_r(f,x)-\sigma_{r|d_1|}(f,x)\right|=0.$$

Если $f(x)\in L[0,1]$ и $f(x)=-f(1-x)$, то

$$\lim_{r\to\infty}\max_{\delta\le x\le 1-\delta}\left|S_r(f,x)-\sigma_{r|d_2|}(f,x)\right|=0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестн. Моск. ун-та. 2000. № 2. С. 21 – 26.

2. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Докл. АН. 2001. Т. 379, № 6. С.741 – 744.

3. *Халова В. А.* Теорема равносходимости для одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 126 – 128.

4. *Халова В. А.* Задача обращения одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 125 – 127.

УДК 517.984

А. П. Хромов

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ*

Пусть A интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t) f(t)dt + \alpha \int_0^x A(x,t) f(t)dt, \tag{1}$$

где ядро $A(x,t)$ удовлетворяет условиям:

а) $A(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial x} A(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} A(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x \partial t} A(x,t)$ непрерывны при $0 \le t \le x \le 1$;

б) $A(x,x) \equiv 1$;

в) $\alpha^2 \ne 1$.

Это простейший вид интегрального оператора $Af = \int_0^1 A(x,t) f(t)dt$, ядро которого имеет разрыв на линиях $t = x$ и $t = 1-x$. В [1] для такого оператора[1], когда еще выполняется условие г) $\frac{\partial}{\partial x} A(x,t)\big|_{t=x} \equiv 0$, установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье. Теперь мы полу-

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

[1] В [1] рассмотрен и более общий случай скачка ($n-1$)-й производной на линиях $t = x$ и $t = 1-x$.