БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям конечномерных возмущений оператора интегрирования // Вестн. Моск. ун-та. 2000. № 2. С. 21 – 26.

2. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Докл. АН. 2001. Т. 379, № 6. С.741 – 744.

3. *Халова В. А.* Теорема равносходимости для одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 126 – 128.

4. *Халова В. А.* Задача обращения одного класса интегральных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 125 – 127.

УДК 517.984

А. П. Хромов

РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ*

Пусть A интегральный оператор:

$$Af = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt + \alpha\int_0^x A(x,t)f(t)dt, \tag{1}$$

где ядро $A(x,t)$ удовлетворяет условиям:

а) $A(x,t)$, $\frac{\partial}{\partial x}A(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}A(x,t)$, $\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}A(x,t)$ непрерывны при $0 \le t \le x \le 1$;

б) $A(x,x) \equiv 1$;

в) $\alpha^2 \ne 1$.

Это простейший вид интегрального оператора $Af = \int_0^1 A(x,t)f(t)dt$, ядро которого имеет разрыв на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$. В [1] для такого оператора[1], когда еще выполняется условие г) $\frac{\partial}{\partial x}A(x,t)|_{t=x} \equiv 0$, установлена равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям и в обычный тригонометрический ряд Фурье. Теперь мы полу-

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

[1] В [1] рассмотрен и более общий случай скачка ($n-1$)-й производной на линиях $t = x$ и $t = 1 - x$.

чим аналогичный результат и в том случае, когда условие г) не выполняется. Введем операторы:

$$A'_x f = \int_0^x A'_x(x,t)f(t)dt\,, \quad Tf = \int_0^x T(x,t)f(t)dt\,,$$

$$T'_t f = \int_0^x T'_t(x,t)f(t)dt\,, \quad T = (E + A'_x)^{-1} - E,$$

где E – единичный оператор, $A'_x(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial x}A(x,t)$, $T'_t(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}T(x,t)$, и краевую задачу в пространстве вектор-функций размерности 2:

$$By'(x) + P_1(x)y(x) - N_1 y(x) = \mu y(x) + F(x)\,, \tag{2}$$

$$M_0 y(0) + M_1 y(1) = 0\,, \tag{3}$$

где $B = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix}$, $P_1(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & -p(1-x) \end{pmatrix} B$, $p(x) = T(x,x)$,

$N_1 = \begin{pmatrix} \alpha T'_t & -T'_t \\ \alpha S T'_t & -S T'_t \end{pmatrix}$, $Sf(x) = f(1-x)$, $\mu = (\alpha^2 - 1)\lambda$, $F(x) = (F_1(x), F_2(x))^T$,

$F_1(x) = (\alpha^2 - 1)f(x)$, $F_2(x) = (\alpha^2 - 1)f(1-x)$, $M_0 = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$ (T – знак транспонирования).

ЛЕММА 1. Если комплексное λ таково, что резольвента Фредгольма $R_\lambda = (E - \lambda A)^{-1} A$ существует, то $y(x) = (y_1(x), y_2(x))^T$, где $y_1(x) = R_\lambda(A)f$, $y_2(x) = y_1(1-x)$, удовлетворяет (2), (3). Обратно, если $y(x)$ удовлетворяет (2), (3) и соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то $R_\lambda(A)$ существует и $R_\lambda(A)f = y_1(x)$, $y_2(x) = y_1(1-x)$.

Введем еще краевую задачу:

$$z'(x) + P(x)z(x) - Nz(x) = \lambda D z(x) + \Phi(x), \quad Q_0 z(0) + Q_1 z(1) = 0\,, \tag{4}$$

где $P(x) = D^{-1}\Gamma^{-1}P_1(x)\Gamma$, $D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$, $d = \sqrt{\alpha^2 - 1}$, $B\Gamma = \Gamma D$,

$N = D^{-1}\Gamma^{-1}N_1\Gamma$, $\Phi(x) = D^{-1}\Gamma^{-1}F(x)$, $Q_0 = M_0\Gamma$, $Q_1 = M_1\Gamma$.

Тогда из леммы 1 следует $R_\lambda(A)f = \gamma_{11}z_1(x,\lambda) + \gamma_{12}z_2(x,\lambda)$, где $z(x,\lambda) = (z_1(x,\lambda), z_2(x,\lambda))^T$ – решение системы (4), γ_{11}, γ_{12} – элементы первой строки матрицы Γ. Присутствие ненулевой матрицы $P(x)$ является серьезным препятствием в исследовании асимптотического поведения решения краевой задачи (4). Здесь мы проведем преобразование ее, заменяющее $P(x)$ на матрицу с элементами $O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ [2, с. 48 – 58]. Пусть

$H_0(x)=diag(h_{11}(x),h_{22}(x))$, где $h_{ii}(x)=\exp\left(-\int\limits_0^x p_{ii}(t)dt\right)$, $p_{ii}(x)$ – диагональные элементы матрицы $P(x)$, а $H_1(x)$ – кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения:

$$H_0'(x)+P(x)H_0(x)+(H_1(x)D-DH_1(x))=0.$$

Так как $p(x)\in C^1[0,1]$, то элементы матрицы $P(x)$ также из $C^1[0,1]$, и поэтому элементы матрицы $H_1(x)$ из $C^1[0,1]$, а матрицы $H_0(x)$ из $C^2[0,1]$.

ЛЕММА 2. При больших $|\lambda|$ неособое преобразование $z=H(x,\lambda)v=\left(H_0(x)+\dfrac{H_1(x)}{\lambda}\right)v$ приводит систему (4) к виду

$$v'+P_\lambda(x)v+N_\lambda v=\lambda Dv+\Phi_\lambda(x),\ Q_{0\lambda}v(0)+Q_{1\lambda}v(1)=0, \tag{5}$$

где

$$P_\lambda(x)=\frac{1}{\lambda}H^{-1}(x,\lambda)\left[P(x)H_1(x)+H_1'(x)\right],\ N_\lambda=-H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda),$$

$$\Phi_\lambda(x)=H^{-1}(x,\lambda)\Phi(x),\ Q_{l\lambda}=Q_lH(l,\lambda)\quad(l=0,1).$$

Рассмотрим теперь такую краевую задачу:

$$w'=\lambda Dw+F,\ U(w)=Q_{0\lambda}w(0)+Q_{1\lambda}w(1)=0. \tag{6}$$

Считаем, что $\operatorname{Re}\lambda d\ge 0\ge\operatorname{Re}(-\lambda d)$ (противоположный случай рассматривается аналогично).

ЛЕММА 3. Если λ таково, что матрица $\Delta(\lambda)=U(V(x,\lambda))$ обратима, то краевая задача (6) однозначно разрешима при любой $F(x)$ с компонентами из $L[0,1]$, и это решение дается формулой

$$w(x,\lambda)=R_{1\lambda}F=-V(x,\lambda)\Delta^{-1}(\lambda)U\left(\int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)F(t)dt\right)+\int\limits_0^1 g(x,t,\lambda)F(t)dt,$$

где $V(x,\lambda)=diag(e^{\lambda dx},e^{-\lambda dx})$, $g(x,t,\lambda)=diag(g_1(x,t,\lambda),g_2(x,t,\lambda))$, $g_1(x,t,\lambda)=-\varepsilon(t,x)e^{\lambda d(x-t)}$, $g_2(x,t,\lambda)=\varepsilon(t,x)e^{-\lambda d(x-t)}$, $\varepsilon(x,t)=1$ при $t\le x$, $\varepsilon(x,t)=0$ при $t\ge x$.

Удалим из λ-плоскости все нули функции $\vartheta_0+\vartheta_1e^{-2\lambda d}$, где $\vartheta_0=-q_{11}q_{02}h_{11}(1)$, $\vartheta_1=-q_{01}q_{12}h_{22}(1)$, $q_{01},q_{02}\,(q_{11},q_{12})$ – элементы первой (второй) строчки матрицы Q_0 (Q_1) вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ. Получившуюся область будем обозначать S_δ.

ЛЕММА 4. В S_δ при больших $|\lambda|$ выполняются оценки:

$$\|R_{1\lambda}F\|_\infty=O(\|F\|_1),\quad \|R_{1\lambda}F\|_\infty=O(\psi(\lambda)\|F\|_\infty),$$

$$\|R_{1\lambda}F\|_1=O(\psi(\lambda)\|F\|_1),\quad \|R_{1\lambda}\chi\|_\infty=O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где $\|\cdot\|$ ($\|\cdot\|_\infty$) – норма в L_1 (L_∞), $\chi(x) = (\chi_1(x), \chi_2(x))^T$ и $\chi_i(x)$ – характеристические функции произвольных отрезков из $[0,1]$,

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda d}(1 - |e^{-\lambda d}|).$$

На основании лемм 1 – 4 методом работы [1] получается следующий результат.

ТЕОРЕМА (равносходимости). Для любой $f(x) \in L[0,1]$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{r \to \infty} \max_{\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon} |S_r(f,x) - \sigma_{rd}(f,x)| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел, попавших в круг $|\lambda| < r$, через $\sigma_r(f,x)$ частичную сумму тригонометрического ряда Фурье по системе $\{\exp 2k\pi ix\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для тех k, для которых $2k\pi < r$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33 – 50.

2. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1954.

УДК 517.51

Г. В. Хромова

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА*

В [1] рассматривался вопрос о получении порядковых оценок модулей непрерывности неограниченных операторов путем привлечения семейств регуляризирующих операторов, соответствующих оптимальным по порядку методам регуляризации уравнений первого рода. В данной статье рассматривается случай, когда для уравнения с оператором интегрирования используется семейство, о котором заранее неизвестно, будет ли оно оптимальным на заданном классе. Здесь дается положительный ответ на этот вопрос и приводятся точные по порядку оценки модуля непрерывности обратного оператора. Рассмотрим

$$\omega(\delta,1) = \sup\{\|f'\|_{C[0,1]} : \|f''\|_{L_2[0,1]} \le 1, \|f\|_{L_2[0,1]} \le \delta, f(0) = f'(1) = 0\}. \quad (1)$$

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).