где $\|\cdot\|$ ($\|\cdot\|_\infty$) – норма в L_1 (L_∞), $\chi(x) = (\chi_1(x), \chi_2(x))^T$ и $\chi_i(x)$ – характеристические функции произвольных отрезков из $[0,1]$,

$\psi(\lambda) = \frac{1}{\mathrm{Re}\lambda d}(1 - |e^{-\lambda d}|)$.

На основании лемм 1 – 4 методом работы [1] получается следующий результат.

ТЕОРЕМА (равносходимости). Для любой $f(x) \in L[0,1]$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{r\to\infty} \max_{\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon} |S_r(f,x) - \sigma_{rd}(f,x)| = 0,$$

где $S_r(f,x)$ – частичная сумма ряда Фурье по собственным и присоединенным функциям оператора A для характеристических чисел, попавших в круг $|\lambda| < r$, через $\sigma_r(f,x)$ частичную сумму тригонометрического ряда Фурье по системе $\{\exp 2k\pi ix\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для тех k, для которых $2k\pi < r$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Корнев В. В., Хромов А. П.* О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Мат. сб. 2001. Т. 192, № 10. С. 33 – 50.

2. *Рапопорт И. М.* О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений. Киев: Изд-во АН УССР, 1954.

УДК 517.51

Г. В. Хромова

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ И ОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА*

В [1] рассматривался вопрос о получении порядковых оценок модулей непрерывности неограниченных операторов путем привлечения семейств регуляризирующих операторов, соответствующих оптимальным по порядку методам регуляризации уравнений первого рода. В данной статье рассматривается случай, когда для уравнения с оператором интегрирования используется семейство, о котором заранее неизвестно, будет ли оно оптимальным на заданном классе. Здесь дается положительный ответ на этот вопрос и приводятся точные по порядку оценки модуля непрерывности обратного оператора. Рассмотрим

$$\omega(\delta,1) = \sup\{\|f'\|_{C[0,1]} : \|f''\|_{L_2[0,1]} \le 1, \|f\|_{L_2[0,1]} \le \delta, f(0) = f'(1) = 0\}. \quad (1)$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

С точки зрения уравнений первого рода, это – модуль непрерывности обратного оператора, соответствующего уравнению

$$Au \equiv \int_0^x u(t)dt = f(x) \tag{2}$$

при дополнительном условии

$$u(x) = \int_x^1 v(t)dt, \ \|v\|_{L_2[0,1]} \le 1. \tag{3}$$

Возьмем в качестве R_α семейство операторов

$$R_\alpha = (\alpha \mathrm{E} + A^* A)^{-1} A^*, \tag{4}$$

соответствующее регуляризации Тихонова нулевого порядка [2]. Так как в нашем случае $u(x) \in R(A^*)$, то, как показано в [3], с помощью семейства (4) можно получать равномерные приближения к решению уравнения (2).

ЛЕММА. Если K_α – интегральные операторы с ядрами $K_\alpha(x,\xi)$ такие, что $\|K_\alpha u - u\|_{C[a,b]} \to 0$ при $\alpha \to 0$ равномерно по

$$u(x) \in M = \{u(x) \in C[a,b] : u(x) = \int_a^b B(x,t)v(t)\,dt, \|v\|_{L_2[a,b]} \le 1\},$$

то справедливо представление

$$\Delta_1(K_\alpha, M) \equiv \sup\{\|K_\alpha u - u\|_{C[a,b]} : u \in M\} =$$

$$= \sup_{a \le x \le b} \left(\int_a^b \left(\int_a^b K_\alpha(x,\xi)B(\xi,t)d\xi - B(x,t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

ТЕОРЕМА. Для модуля непрерывности (1) справедлива двусторонняя оценка, точная по порядку, асимптотическая по δ при $\delta \to 0$:

$$\frac{1}{4}\delta^{\frac{1}{4}} + \psi_2(\delta) \le \omega(\delta,1) \le C_1 \delta^{\frac{1}{4}} + \psi_1(\delta), \tag{6}$$

где $C = 2.3^{-\frac{3}{4}}(2e^{-1}+1)^{\frac{3}{8}}(2e^{-1}+3)^{\frac{1}{8}}$, $\psi_1(\delta), \psi_2(\delta)$ суть $O(e^{-\delta^{-\frac{1}{2}}})$.

Доказательство. Для оператора $R_\alpha A$ имеет место представление $R_\alpha A = \frac{1}{\alpha}((A^* A)^{-1} + \frac{1}{\alpha}\mathrm{E})^{-1}$, а отсюда вытекает, что $R_\alpha A = \frac{1}{\alpha} G_\alpha$, где G_α – интегральный оператор с ядром Грина дифференциального оператора

$$L : ly = -y'',\ y(0) = y'(1) = 0.$$

Применяем метод из [1] с использованием формулы (5) при $K_\alpha = R_\alpha A$ и представления для нормы $\|R_\alpha\|_{L_2 \to C}$, полученного в [4]:

$$\|R_\alpha\|_{L_2 \to C} = \alpha^{-\frac{1}{2}} \sup_{a \le x \le b} \left(K_\alpha(x,x) - \frac{1}{\alpha}\int_0^1 K_\alpha^2(x,\xi)d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $K_\alpha(x,\xi)$ – ядро оператора $R_\alpha A$. Отсюда приходим к оценке сверху в (6). Для оценки снизу строим функцию

$$f_0(x)=\frac{x}{2}\delta^{\frac{1}{4}}(e^{-\delta^{-\frac{1}{2}}x}-e^{-\delta^{-\frac{1}{2}}}(1-\delta^{-\frac{1}{2}})).$$

Можно убедиться в том, что $f_0(x)\in M$, а $\|f_0'\|_C>\frac{1}{4}\delta^{\frac{1}{4}}$ при достаточно малых δ.

СЛЕДСТВИЕ. Метод регуляризации нулевого порядка, используемый для получения равномерного приближения к решению уравнения (2) на классе M, соответствующем условиям (3), является оптимальным по порядку. При этом константа K в «оценке оптимальности» (см. оценку (2) из [1]) имеет вид $K=4C_1$, C_1 определена в теореме.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромова Г. В.* Об оценке модулей непрерывности неограниченных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 140 – 143.

2. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49 – 52.

3. *Хромова Г. В.* О регуляризации интегральных уравнений с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика.1972. № 8(123). С. 94 – 104.

4. *Хромова Г. В.* О нахождении равномерных приближений к решению интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 4. С. 3 – 10.

УДК 517.984

Д. Г. Шалтыко

О СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПЯТОГО ПОРЯДКА*

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ краевую задачу, порожденную дифференциальным уравнением:

$$l[y]=y^{(5)}-\lambda y=0 \qquad (1)$$

и распадающимися краевыми условиями

$$y(0)=y'(0)=y''(0)=y'(\alpha)=y(1)=0 \quad (0<\alpha<1). \qquad (2)$$

Данные краевые условия являются нерегулярными, и функция Грина задачи (1), (2) имеет экспоненциальный рост при $t<x$. Это представляет

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).