где $K_\alpha(x,\xi)$ – ядро оператора $R_\alpha A$. Отсюда приходим к оценке сверху в (6). Для оценки снизу строим функцию

$$f_0(x) = \frac{x}{2}\delta^{\frac{1}{4}}(e^{-\delta^{-\frac{1}{2}}x} - e^{-\delta^{-\frac{1}{2}}}(1-\delta^{-\frac{1}{2}})).$$

Можно убедиться в том, что $f_0(x) \in M$, а $\|f_0'\|_C > \frac{1}{4}\delta^{\frac{1}{4}}$ при достаточно малых δ.

СЛЕДСТВИЕ. Метод регуляризации нулевого порядка, используемый для получения равномерного приближения к решению уравнения (2) на классе M, соответствующем условиям (3), является оптимальным по порядку. При этом константа K в «оценке оптимальности» (см. оценку (2) из [1]) имеет вид $K = 4C_1$, C_1 определена в теореме.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромова Г. В.* Об оценке модулей непрерывности неограниченных операторов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 140 – 143.

2. *Тихонов А. Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 1. С. 49 – 52.

3. *Хромова Г. В.* О регуляризации интегральных уравнений с ядром Грина // Изв. вузов. Сер. Математика.1972. № 8(123). С. 94 – 104.

4. *Хромова Г. В.* О нахождении равномерных приближений к решению интегральных уравнений первого рода // Дифференциальные уравнения и вычислительная математика. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 4. С. 3 – 10.

УДК 517.984

Д. Г. Шалтыко

О СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ОДНОЙ ТРЕХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПЯТОГО ПОРЯДКА*

Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ краевую задачу, порожденную дифференциальным уравнением:

$$l[y] = y^{(5)} - \lambda y = 0 \tag{1}$$

и распадающимися краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y'(\alpha) = y(1) = 0 \quad (0 < \alpha < 1). \tag{2}$$

Данные краевые условия являются нерегулярными, и функция Грина задачи (1), (2) имеет экспоненциальный рост при $t < x$. Это представляет

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1), РФФИ (проект 03-01-000169) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.375).

собой существенную трудность при исследовании подобной задачи. Отметим, что задача о сходимости спектральных разложений в случае $\alpha = 0$ (и для более общих дифференциальных операторов n-го порядка с произвольными распадающимися краевыми условиями) получила окончательное решение в работе А. П. Хромова [1]. Исследованием же задач вида (1), (2) и даже более общими многоточечными краевыми задачами n-го порядка занимался Г. Фрайлинг [2]. Им были получены достаточные условия разложимости функций в ряды по собственным функциям таких задач. К сожалению, эти условия налагают серьезные требования на аналитичность разлагаемых функций и достаточно далеки от необходимых условий. В настоящей статье приводятся достаточные условия для сходимости спектральных разложений, усиливающие результат Фрайлинга для случая задачи (1), (2).

Справедливы следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 1. Краевая задача (1), (2) имеет бесконечно много собственных значений, которые можно разложить в две серии:

$$\lambda_{k,1} = -\left(\rho_{k,1}^{(0)} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^5, \quad \rho_{k,1}^{(0)} = \frac{(5k+1)\pi}{5(1-\alpha)\sin\dfrac{\pi}{5}}, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$

$$\lambda_{k,2} = -\left(\rho_{k,2}^{(0)} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^5, \quad \rho_{k,2} = \frac{k\pi}{\alpha\sin\dfrac{2\pi}{5}} e^{i\frac{\pi}{5}}, \quad k = 1,2,\ldots .$$

При этом все собственные значения, достаточно большие по модулю, простые. Для соответствующих им последовательностей собственных функций справедливы формулы:

$$y_{k,1} = e^{\rho_{k,1}^{(0)}(\omega_5 + \omega_1 x)}\left(1 - \exp\left(\left(2i\frac{(5k+1)\pi}{5(1-\alpha)}\right)(1-x)\right) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$y_{k,2} = e^{\rho_{k,2}^{(0)}(\omega_5 + \omega_1 x)}\left(1 + \exp\left(\left(-2i\frac{k\pi}{\alpha}\right)x\right) + O\left(\frac{1}{k}\right)\right).$$

Пусть $\omega_k = \exp\left(\dfrac{2k-1}{5}\pi i\right)$, $k = 1,\ldots,5$. Далее, пусть $G(x,t,\lambda)$ является функцией Грина задачи (1), (2) и $\rho^5 = -\lambda$. Через D_β обозначим область в комплексной плоскости, ограниченную отрезками прямых

$$\eta = \left(\xi\cos\frac{2k\pi}{5} - \beta\cos\frac{2\pi}{5}\right)\sin\frac{2k\pi}{5}, \quad k = 1,2,3,4 .$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть ряды $\sum a_k y_{k,1}(x)$ и $\sum b_k y_{k,2}(x)$ сходятся равномерно на некотором интервале $[x_0, x_1] \subset (0,1)$. Тогда ряд

$$\sum a_k y_{k,1}(z) + \sum b_k y_{k,2}(z)$$

сходится абсолютно и равномерно во всякой замкнутой области, лежащей в D_{x_1}, и представляет собой в этой области регулярную функцию.

Сформулируем теперь достаточное условие сходимости.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f(x) \in L\ [0,1]$ и $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, причем выполняются следующие условия:

а) f_1, f_2 аналитичны в области D_β $(0 < \beta < \alpha)$;

б) f_1, $l[f_1]$, $l^2[f_1]$, ..., f_2, $l[f_2]$, $l^2[f_2]$, ... удовлетворяют краевым условиям в точке 0;

в) $$\frac{d^p}{dx^p} l^q[f_1] = O\left(\left(\frac{1+\varepsilon}{(\rho-\varepsilon-x)\cos\frac{\pi}{5}}\right)^{5q+p} (5q+p)!\right),\ x \in [0, \beta-\varepsilon];$$

г) $$\frac{d^p}{dx^p} l^q[f_2] = O\left(\left(\frac{1+\varepsilon}{(\rho-\varepsilon-x)\cos\frac{2\pi}{5}}\right)^{5q+p} (5q+p)!\right),\ x \in [0, \beta-\varepsilon].$$

Тогда $f(x)$ разлагается на $[0, \beta_1]$ $(0 < \beta_1 < \beta)$ в равномерно сходящийся ряд Фурье по собственным функциям задачи (1), (2).

Приведем ряд наиболее важных лемм, используемых для доказательства теоремы 3.

ЛЕММА 1. При $x \in [0, \beta-\varepsilon_1]$, $t \geq \beta-\varepsilon_1$ справедлива оценка

$$G(x,t,\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^4}\exp(-\delta_1|\rho|)\right),$$

где $\delta_1 = (\varepsilon-\varepsilon_1)\cos\frac{\pi}{5}$ $(0 < \varepsilon_1 < \varepsilon)$.

ЛЕММА 2. При $x \geq t$ справедлива оценка

$$G(x,t,\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^4}\exp\left(\cos\frac{\pi}{5}|\rho|(x-t)\right)\right).$$

ЛЕММА 3. При $t \leq x \leq \alpha$ справедлива оценка

$$G(x,t,\lambda) = O\left(\frac{1}{\rho^4}\exp\left(\cos\frac{2\pi}{5}|\rho|(x-t)\right)\right).$$

ЛЕММА 4. Пусть $x \in [0, \beta-\varepsilon_1]$ и для функции $f_1(x)$ выполняются условия теоремы 3. Тогда

$$f_1 - S_{l+h}(f_1) = o(1)$$

при больших $|\lambda|$, где $S_{l+h}(f_1)$ представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции f_1.

ЛЕММА 5. Пусть $x \in [0, \beta - \varepsilon_1]$ и для функции $f_2(x)$ выполняются условия теоремы 3. Тогда

$$f_2 - S_{l+h}(f_2) = o(1)$$

при больших $|\lambda|$, где $S_{l+h}(f_2)$ представляет собой частичную сумму ряда Фурье функции f_2.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромов А. П.* Дифференциальный оператор с нерегулярными распадающимися краевыми условиями // Мат. заметки. 1976. Т. 19, № 5. С. 763 – 772.

2. *Freiling G.* Irregulare Mehrpunkt-Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen: Habilitationsschrift dem Fachbereich 11 – Mathematik. Duisburg, 1979. 90 s.

УДК 517.5

В. И. Шевцов

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКОМ КЛАССЕ ФУНКЦИЙ

В данной статье рассматриваются ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{\lambda_k x}. \tag{1}$$

Представления функций рядами вида (1) изучались многими математиками. Фундаментальные исследования по теории представления функций рядами (1) проведены А. Ф. Леонтьевым [1, 2] и его учениками.

Пусть $L(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \lambda^k$ – целая функция уточненного порядка $\rho(r)$ и типа σ. По определению функция $\rho(r)$ называется уточненным порядком, если существуют $\lim_{r\to\infty} \rho(r) = p,\ \lim_{r\to\infty} r\rho'(r)\ln r = 0$. Обозначим через $r = \varphi(t)$ функцию, обратную к функции $t = r^{\rho(r)}$. Предположим, что все нули функции $L(\lambda)$ простые, обозначим их через λ_k. В дальнейшем $0 < p < 1$. Система функций $e^{\lambda_k x}$ неполна в метрике C ни на каком отрезке, так как $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} < \infty$ при условии $0 < p < 1$ [2, с. 61]. Обозначим через A_{m_n} класс бесконечно дифференцируемых на интервале $[a;b]$ функций $f(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$1)\ \left|f^{(n)}(x)\right| < B_f^n m_n \ (n \ge 0),\ a < x < b\ ,\ 2)\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{m_n}}{\varphi(n)} = 0, \tag{2}$$

где B_f – постоянная, для каждой функции $f(x)$ своя.