БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. М., 1976.

2. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. М., 1980.

3. *Мандельбройт С.* Квазианалитические классы функций. М.;Л., 1937.

4. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды, регуляризация последовательностей, применения. М., 1955.

5. *Шевцов В. И.* Об одном квазианалитическом классе функций. Саратов, 2000. 15 с. Деп. в ВИНИТИ 20.04.2000, №1103-В00.

6. *Шевцов В. И.* Уравнение бесконечного порядка в одном квазианалитическом классе функций // Математика, механика, математическая кибернетика: Сб. науч. тр. Саратов, 1999. С. 72 – 75.

УДК 519.517.948

Е. В. Шишкова

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $C^1[0,1]$*

Рассмотрим уравнение Абеля:

$$Au \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^{1-\beta}}dt = f(x), \qquad 0 \le x \le 1, \quad 0 < \beta < 1. \tag{1}$$

В данной статье, используя общий подход из [1], по аналогии с [2] построен метод нахождения приближений к решению $u(x) \in C[0,1]$ уравнения (1), а также к производной от решения (если $u(x) \in C^1[0,1]$), когда правая часть $f(x)$ уравнения задана ее δ-приближением в метрике $L_2[0,1]$: $\|f - f_\delta\|_{L_2} < \delta$.

Подход из [1] заключается в следующем: если для уравнения известен обратный оператор A^{-1} и имеется семейство операторов T_α такое, что $\|T_\alpha u - u\|_C \to 0$ при $\alpha \to 0$, то семейство операторов $R_\alpha = T_\alpha A^{-1}$ будет регуляризирующим для исходного уравнения в случае, если R_α является ограниченным оператором, действующим из L_2 в C.

Известно [3], что

$$A^{-1}f = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^\beta}dt\right).$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для поддержки ведущих научных школ РФ (проект НШ-1295.2003.1).

Рассмотрим операторы:

$$T_\alpha^0 u = -\frac{3}{4\alpha^3}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}\left((t-x)^2-\alpha^2\right)u(t)\,dt \quad \text{и} \quad T_\alpha^1 u = \frac{3}{2\alpha^3}\int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}(t-x)u(t)\,dt,$$

где $\alpha > 0$ – параметр.

Известно [4], что если $u(x) \in C^1[0,1]$, то $\left\| T_\alpha^p u - u^{(p)} \right\|_{C_\varepsilon} \to 0$ при $\alpha \to 0$ ($p = 0, 1$), где $C_\varepsilon = C[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, $\varepsilon > \alpha$.

ТЕОРЕМА 1. Для интегральных операторов

$$\widetilde{T}_\alpha^0 u = -\frac{3}{4\alpha^3}\begin{cases} \int\limits_0^{\alpha-x}\left(K_{\alpha1}(x,t)+K_{\alpha2}(x,t)\right)u(t)\,dt + \int\limits_{\alpha-x}^{x+\alpha}K_{\alpha1}(x,t)u(t)\,dt, & x\in[0,\alpha], \\ \int\limits_{x-\alpha}^{x+\alpha}K_{\alpha1}(x,t)u(t)\,dt, & x\in[\alpha,1-\alpha], \\ \int\limits_{x-\alpha}^{2-x-\alpha}K_{\alpha1}(x,t)\,u(t)\,dt + \int\limits_{2-x-\alpha}^{1}\left(K_{\alpha1}(x,t)+K_{\alpha3}(x,t)\right)u(t)\,dt, & x\in[1-\alpha,1], \end{cases}$$

где

$$K_{\alpha1}(x,t) = (t-x)^2 - \alpha^2,$$
$$K_{\alpha2}(x,t) = (t+x)^2 - \alpha^2,$$
$$K_{\alpha3}(x,t) = (2-t-x)^2 - \alpha^2,$$

справедливо: $\left\| \widetilde{T}_\alpha^0 u - u \right\|_{C[0,1]} \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Обозначим ядра операторов $\widetilde{T}_\alpha^0$ через $\widetilde{T}_\alpha^0(x,t)$.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $u(x) \in C^1[0,1]$ и $u(0) = u(1) = 0$, тогда для интегральных операторов

$$\widetilde{T}_\alpha^1 u = -\int\limits_0^1 \frac{d\left(\widetilde{T}_\alpha^0(x,t)\right)}{dt}u(t)\,dt$$

справедливо: $\left\| \widetilde{T}_\alpha^1 u - u' \right\|_{C[0,1]} \to 0$ при $\alpha \to 0$.

Рассмотрим семейства операторов:

$$R_\alpha^p = \widetilde{T}_\alpha^p A^{-1} \quad (p = 0, 1).$$

ТЕОРЕМА 3. Операторы $R_\alpha^p = \widetilde{T}_\alpha^p A^{-1}$ ($p = 0, 1$) имеют вид

$$R_\alpha^p f = \frac{3}{2\alpha^3\Gamma(3-\beta-p)}\hat{R}_\alpha^p f,$$

где

при $x \in [0,\alpha]$

$$\hat{R}_\alpha^p f = \int\limits_0^{\alpha-x}\left(R_{\alpha\beta1}^p(x,\tau) + R_{\alpha\beta2}^p(x,\tau)\right)f(\tau)\,d\tau + \int\limits_{\alpha-x}^{\alpha+x}R_{\alpha\beta2}^p(x,\tau)f(\tau)\,d\tau;$$

при $x \in [\alpha, 1-\alpha]$

$$\hat{R}_\alpha^p f = \int_0^{x-\alpha} \left(R_{\alpha\beta 3}^p(x,\tau) + R_{\alpha\beta 2}^p(x,\tau)\right) f(\tau)\,d\tau + \int_{x-\alpha}^{x+\alpha} R_{\alpha\beta 2}^p(x,\tau) f(\tau)\,d\tau;$$

при $x \in [1-\alpha, 1]$

$$\hat{R}_\alpha^p f = \int_0^{x-\alpha} \left(R_{\alpha\beta 3}^p(x,\tau) + R_{\alpha\beta 4}^p(x,\tau) + R_{\alpha\beta 5}^p(x,\tau)\right) f(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{x-\alpha}^{2-x-\alpha} \left(R_{\alpha\beta 4}^p(x,\tau) + R_{\alpha\beta 5}^p(x,\tau)\right) f(\tau)\,d\tau + \int_{2-x-\alpha}^{1} R_{\alpha\beta 5}^p(x,\tau) f(\tau)\,d\tau;$$

$$R_{\alpha\beta 1}^p(x,\tau) = (x+\tau-\alpha\beta+\alpha(1-p))(\alpha-x-\tau)^{1-\beta-p},$$

$$R_{\alpha\beta 2}^p(x,\tau) = (\tau-x-\alpha\beta+\alpha(1-p))(x-\tau+\alpha)^{1-\beta-p},$$

$$R_{\alpha\beta 3}^p(x,\tau) = (x-\tau-\alpha\beta+\alpha(1-p))(x-\tau-\alpha)^{1-\beta-p},$$

$$R_{\alpha\beta 4}^p(x,\tau) = (2-x-\tau-\alpha\beta+\alpha(1-p))(2-x-\tau-\alpha)^{1-\beta-p},$$

$$R_{\alpha\beta 5}^p(x,\tau) = (1-p)(1-\beta)(2-\beta)\left(\alpha^2-(1-x)^2\right)(1-\tau)^{-\beta} - 2(1-\tau)^{2-\beta-p}.$$

Каждый из операторов R_α^p $(p = 0, 1)$ при $0 < \beta < \frac{1}{2}$ является линейным ограниченным действующим из $L_2[0,1]$ в $C[0,1]$ интегральным оператором. При этом в пространстве $C[0, 1-\varepsilon]$ $(\varepsilon > \alpha)$ оператор R_α^0 является линейным ограниченным при $0 < \beta < 1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хромова Г. В.* Об одном способе построения методов регуляризации уравнений первого рода // ЖВМ и МФ. 2000. Т. 40, № 7. С. 907 – 1002 .

2. *Хромова Г. В.* О приближенных решениях уравнения Абеля // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. 2001. № 3. С. 5 – 9.

3. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. С. 38.

4. *Хромова Г. В.* О дифференцировании функций, заданных с погрешностью // Диф. уравнения и выч. математика. 1984. Вып. 6. С. 53 – 58.