УДК 517.984

В. А. Юрко

ОБ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ НА ГРАФАХ*

1. Рассмотрим компактное связное дерево T в $\mathbf{R}^m$ с корнем v_0, множеством вершин $V=\{v_0,...,v_r\}$ и множеством ребер $E=\{e_1,...e_r\}$. Предположим, что длина каждого ребра равна 1. Вершина называется *граничной*, если она принадлежит только одному ребру. Такое ребро называется *граничным*. Все остальные вершины и ребра называются *внутренними*. Без ограничения общности считаем, что v_0 является граничной вершиной.

Для двух точек $a,b\in T$ будем писать $a\le b$, если a лежит на единственном простом пути, соединяющем корень v_0 с b; пусть $|b|$ обозначает длину этого пути. Будем писать $a<b$, если $a\le b$ и $a\ne b$. Отношение $<$ определяет частичную упорядоченность на T. Если $a<b$, то обозначим $[a,b]:=\{z\in T: a\le z\le b\}$. В частности, если $e=[v,w]$ – ребро, то мы будем называть v его *начальной точкой*, w – его *конечной точкой* и будем говорить, что e *выходит* из v и *заканчивается* в w. Для каждой внутренней вершины v мы обозначим через $R(v):=\{e\in E: e=[v,w], w\in V\}$ множество ребер, выходящих из v. Для любой $v\in V$ число $|v|$ является целым неотрицательным числом, которое называется порядком v. Для $e\in E$ его порядок определяется как порядок его конечной точки. Число $\sigma:=\max_{j=\overline{1,r}}|v_j|$ называется *высотой дерева* T. Пусть $V^{(\mu)}:=\{v\in V: |v|=\mu\}$, $\mu=\overline{0,\sigma}$ – множество вершин порядка μ, и пусть $E^{(\mu)}:=\{e\in E: e=[v,w], v\in V^{(\mu-1)}, w\in V^{(\mu)}\}$, $\mu=\overline{1,\sigma}$ – множество ребер порядка μ.

Каждое ребро $e\in E$ рассматривается как отрезок $[0,1]$ и параметризуется параметром $x\in[0,1]$. Для нас удобно выбрать следующую ориентацию на каждом ребре $e=[v,w]\in E$: если $z=z(x)\in e$, то $z(0)=w$, $z(1)=v$, т.е. $x=0$ соответствует конечной точке w, а $x=1$ соответствует начальной точке v. Для определенности занумеруем вершины v_j следующим образом: $\Gamma:=\{v_0,v_1,...,v_p\}$ – граничные вершины, $v_{p+1}\in V^{(1)}$, а v_j, $j>p+1$, занумерованы в порядке возрастания $|v_j|$. Аналогично занумеруем ребра, а именно $e_j=[v_{j_k},v_j]$, $j=\overline{1,r}$, $j_k<j$. В частности, $E:=\{e_1,...,e_{p+1}\}$ – множество граничных ребер, $e_{p+1}=[v_0,v_{p+1}]$. Ясно, что $e_j\in E^{(\mu)}$ тогда и только тогда, когда $v_j\in V^{(\mu)}$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00007) и программы «Университеты России» (проект ур.04.01.376).

2. Интегрируемая функция Y на T может быть представлена как вектор $Y(x)=[y_j(x)]_{j\in J}$, $x\in[0,1]$, где $J:=\{j: j=\overline{1,r}\}$, и функция $y_j(x)$ определена на ребре e_j. Пусть $q=[q_j]_{j\in J}$ – интегрируемая вещественнозначная функция на T, которая называется потенциалом. Рассмотрим уравнение Штурма – Лиувилля на T:

$$-y''_j(x)+q_j(x)y_j(x)=\lambda y_j(x), \qquad x\in[0,1], \tag{1}$$

где $j\in J,\lambda$ – спектральный параметр, функции $y_j(x), y_j'(x)$ абсолютно непрерывны на $[0,1]$ и удовлетворяют следующим условиям склейки в каждой внутренней вершине v_k, $k=\overline{p+1,r}$:

$$\left.\begin{aligned} &y_j(1)=y_k(0) \text{ для всех } e_j\in R(v_k) \text{ (условие непрерывности)},\\ &\sum_{e_j\in R(v_k)} y'_j(1)=y'_k(0) \text{ (условие Кирхгофа)}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Условия склейки (2) называются *стандартными.* В электрических сетях (2) выражает закон Кирхгофа; при колебаниях упругих сетей – баланс напряжений и т.д. Отметим, что в (2) мы имеем $2r-p-1$ условий. Для того чтобы определить краевую задачу для (1), нам нужно дополнительно задать p+1 условие в граничных вершинах v_j, $j=\overline{0,p}$. Например, через L_0 обозначим краевую задачу для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями Дирихле $Y_{|v_j}=0$, $j=\overline{0,p}$.

3. Пусть $\Psi_k(x,\lambda)=[\psi_{kj}(x,\lambda)]_{j\in J}$, $k=\overline{0,p}$ – решения уравнения (1), удовлетворяющие (2) и краевым условиям $\Psi_{k|v_j}=\delta_{kj}$, $j=\overline{0,p}$, где δ_{kj} – символ Кронекера. Функции Ψ_k называются решениями Вейля для (1) относительно граничной вершины v_k. Обозначим $M(\lambda)=[M_k(\lambda)]_{k=\overline{1,p}}$, где $M_k(\lambda):=\psi'_{kk}(0,\lambda)$. Функции $M_k(\lambda)$ называются *функциями Вейля*, а $M(\lambda)$ называется *вектором Вейля* для (1). Обратная задача ставится следующим образом.

Обратная задача 1. По заданному M построить потенциал q на T.

Понятие вектора Вейля M является обобщением понятия функции Вейля (m-функции) для классического оператора Штурма – Лиувилля. Таким образом, обратная задача 1 является обобщением классической обратной задачи для оператора Штурма – Лиувилля на отрезке по функции Вейля и (что эквивалентно) по спектральной мере.

Сформулируем теорему единственности решения обратной задачи 1. Для этого наряду с T рассмотрим дерево $\widetilde{T}$ того же вида, но с другим потенциалом $\widetilde{q}$. Везде в дальнейшем, если символ α обозначает объект, относящийся к T, то $\widetilde{\alpha}$ будет обозначать аналогичный объект, относящийся к $\widetilde{T}$.

ТЕОРЕМА 1. Если $M = \widetilde{M}$, то $q = \widetilde{q}$. Таким образом, задание вектора Вейля M однозначно определяет потенциал q на T.

Доказательство теоремы конструктивно и дает процедуру решения обратной задачи 1. Известно, что для классического оператора Штурма – Лиувилля на отрезке задание m-функции эквивалентно заданию спектральной меры и также эквивалентно заданию дискретных спектральных данных, введенных Марченко, Левинсоном и Боргом [1]. Аналогично задание вектора Вейля M на T эквивалентно заданию некоторых дискретных спектральных характеристик. Например дадим постановку обратной задачи на T по системе спектров, которая является обобщением классической обратной задачи Борга для уравнения Штурма – Лиувилля на отрезке по двум спектрам. Обозначим через $L_k, k = \overline{1,p}$ краевые задачи для уравнения (1) с условиями склейки (2) и с краевыми условиями $y'_k(0) = 0$, $Y_{|v_j} = 0, j = \overline{0,p} \setminus k$. Пусть $\{\lambda_{lk}\}_{l\geq 1}$, $k = \overline{0,p}$, – собственные значения краевых задач L_k.

Обратная задача 2. По заданным спектрам $\{\lambda_{lk}\}_{l\geq 1}, k = \overline{0,p}$, построить потенциал q на T.

Если $r = 1$ (т.е. дерево T является интервалом [0,1]), то $p = 1$, и обратная задача 2 совпадает с классической задачей Борга по двум спектрам.

ТЕОРЕМА 2. Если $\lambda_{lk} = \widetilde{\lambda}_{lk}$ при всех $l \geq 1, k = \overline{0,p}$, то $q = \widetilde{q}$. Таким образом, задание спектров краевых задач $L_k, k = \overline{0,p}$, однозначно определяет потенциал q на T.

Доказательство теоремы конструктивно и дает процедуру решения обратной задачи 2. Отметим, что для решения обратных задач 1 и 2 мы используем и развиваем идеи метода спектральных отображений [2].

Замечание. Функции Вейля $M_k(\lambda)$ являются мероморфными по λ с полюсами в точках $\{\lambda_{l0}\}_{l\geq 1}$. Можно показать, что задание вектора Вейля $M(\lambda)$ равносильно заданию дискретных спектральных данных $S := \{\lambda_{l0}, \alpha_{lk}\}_{l\geq 1, k=\overline{1,p}}$, где α_{lk} – вычеты $M_k(\lambda)$ в точках λ_{l0}. Таким образом, обратная задача 1 эквивалентна обратной задаче восстановления потенциала q на дереве T по спектральным данным S, которые являются обобщением спектральных данных Марченко для классического оператора Штурма – Лиувилля на отрезке [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Юрко В. А.* Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов, 2001.
2. *Yurko V. A.* Method of Spectral Mappings in the Inverse Problem Theory. Inverse and Ill-posed Problems Series. Utrecht, 2002.