УДК 535.319

Н. Ю. Агафонова

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

Напряженное состояние однородного изотропного тела $Q \in R^3$, находящегося под действием некоторых объемных или поверхностных сил, описывается уравнением вида [1]

$$u_j(P_0) + \iint_E [u_i(P)T_{ij}(P_0,P) - t_i(P)U_{ij}(P_0,P)]\,dE(P) =$$
$$= \iiint_Q b_i(p)U_{ij}(P_0,p)\,dQ(p), \qquad (1)$$

где P_0 – фиксированная точка тела, P – некоторая точка поверхности E, p – некоторая точка тела Q, t_i – компоненты вектора поверхностных сил, b_i – компоненты вектора объемных сил, u_i – компоненты вектора перемещений.

Компоненты матрицы фундаментальных решений выражаются формулой

$$U_{ij}(P_0,P) = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r}\left[(3-4\nu)\delta_{ij} + \frac{\partial r}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial r}{\partial x_j}\right].$$

Компоненты матрицы сингулярных решений имеют вид

$$T_{ij}(P_0,P) = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial r}{\partial n}\left[\delta_{ij} + \frac{3}{1-2\nu}\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_j}\right] - \frac{\partial r}{\partial x_i}n_j + \frac{\partial r}{\partial x_j}n_i\right\},$$

где $r^2 = (x_i - x_j)(x_i - x_j)$, x_i – координаты точки P, x_j – координаты точки P_0, n_i – компоненты вектора нормали n к поверхности тела.

Пусть Q является телом вращения. Перейдем к цилиндрической системе координат $x_1 = x$, $x_2 = R\cos\varphi$, $x_3 = R\sin\varphi$. Уравнение (1) примет вид

$$v_l + \int\limits_{\Gamma}\int\limits_{0}^{2\pi}\left(T_{kl}v_k - V_{kl}F_k\right)R d\varphi d\Gamma = \int\limits_{D}\int\limits_{0}^{2\pi} V_{kl}B_k R\, d\varphi\, dS,$$

где v_l – компоненты вектора перемещений, V_{kl}, T_{kl} – компоненты матриц фундаментальных и сингулярных решений соответственно, F_k, B_k – компоненты поверхностных и объемных сил соответственно, записанные в цилиндрической системе координат. Здесь D – двумерная область, вращением которой получается тело Q, а Γ – ее граница. При этом

$$V_{ij} = \frac{1}{16\pi\mu(1-\nu)r}\left[(3-4\nu)\alpha_{lj}^{0}\alpha_{kj} + \frac{\partial r}{\partial \xi_k}\left(-\frac{\partial r}{\partial \eta_l}\right)\right],$$

$$T_{kl} = \frac{1-2\nu}{8\pi(1-\nu)}\frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial r}{\partial \hat{n}}\left[\alpha_{lj}^{0}\alpha_{kj} + \frac{3}{1-2\nu}\frac{\partial r}{\partial \xi_k}\left(-\frac{\partial r}{\partial \eta_l}\right)\right] - \frac{\partial r}{\partial \xi_k}\alpha_{lj}^{0}\alpha_{ij}\hat{n}_i + \left(-\frac{\partial r}{\partial \eta_l}\right)\hat{n}_k\right\},$$

где α_{ij} – направляющие косинусы, $\hat{n}$ – вектор нормали, ξ_k – цилиндрические координаты произвольной точки тела, η_l – цилиндрические координаты точки, в которой ищется решение.

Раскладывая компоненты векторов v, F, B в ряды Фурье вида

$$h_l(x,R,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} h_l^c(x,R)\cos m\varphi + h_l^s(x,R)\sin m\varphi \quad \text{для} \quad l = 1, 2,$$

$$h_l(x,R,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} h_l^s(x,R)\cos m\varphi + h_l^c(x,R)\sin m\varphi \quad \text{для} \quad l = 3$$

и проводя необходимые преобразования, получаем следующую систему интегральных уравнений для коэффициентов $v_1^c(x,R)$, $v_2^c(x,R)$, $v_3^c(x,R)$.

$$\begin{cases} v_1^c + \int\limits_{\Gamma}(v_1^c T_{11}^c + v_2^c T_{21}^c + v_3^c T_{31}^s)R d\Gamma - \int\limits_{\Gamma}(F_1^c V_{11}^c + F_2^c V_{21}^c + F_3^c V_{31}^s)R d\Gamma = \\ = \iint\limits_{D}(B_1^c V_{11}^c + B_2^c V_{21}^c + B_3^c V_{31}^s)R dS; \\ v_2^c + \int\limits_{\Gamma}(v_1^c T_{12}^c + v_2^c T_{22}^c + v_3^c T_{32}^s)R d\Gamma - \int\limits_{\Gamma}(F_1^c V_{12}^c + F_2^c V_{22}^c + F_3^c V_{32}^s)R d\Gamma = \\ = \iint\limits_{D}(B_1^c V_{12}^c + B_2^c V_{22}^c + B_3^c V_{32}^s)R dS; \\ v_2^c + \int\limits_{\Gamma}(v_1^c T_{13}^s + v_2^c T_{23}^s + v_3^c T_{33}^c)R d\Gamma - \int\limits_{\Gamma}(F_1^c V_{13}^s + F_2^c V_{23}^s + F_3^c V_{33}^c)R d\Gamma = \\ = \iint\limits_{D}(B_1^c V_{13}^s + B_2^c V_{23}^s + B_3^c V_{33}^c)R dS. \end{cases} \tag{2}$$

Заменой индексов $c \Leftrightarrow s$ получается соответствующая система для коэффициентов $v_1^c(x,R)$, $v_2^c(x,R)$, $v_3^c(x,R)$.

Компоненты

$$T_{kl}^c = \int_0^{2\pi} T_{kl} \cos m\varphi \, d\varphi, \quad T_{kl}^s = \int_0^{2\pi} T_{kl} \sin m\varphi \, d\varphi,$$

$$V_{kl}^c = \int_0^{2\pi} V_{kl} \cos m\varphi \, d\varphi \text{ и } V_{kl}^s = \int_0^{2\pi} V_{kl} \sin m\varphi \, d\varphi$$

требуют вычисления интегралов вида

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2m\varphi}{\rho^a} d\varphi, \text{ где } \rho^2 = (x - x_0)^2 + (R - R_0)^2 + 4RR_0 \sin^2 \varphi, \; a = 1,3,5.$$

Используя метод представления границы плоской области в Р-форме, предложенный в [2], в уравнениях (2) перейдем к параметру σ. Предположим, что всю границу Γ можно разбить на гладкие участки $L_1, L_2, ..., L_N$, представимые уравнениями в параметрическом виде $x = x(\sigma) = x_k(\sigma)$, $R = R(\sigma) = R_k(\sigma)$, $\sigma \in L_k$. Положительным направлением движения по Γ считается то, при котором подобласть с большим номером остается слева. Параметр σ выбирается так, чтобы он монотонно увеличивался при движении по L_k в положительном направлении и конечное значение σ на L_{k-1} было его начальным значением на L_k. Тогда участок L_k взаимно однозначно отобразится на отрезок $[d_{k-1}, d_k]$, а вся граница Γ области D – на отрезок $[d_0, d_N]$ числовой оси σ. Элемент поверхности E для областей вращения выразится теперь следующим образом:

$$dE = R(\sigma)\chi(\sigma)d\varphi d\sigma, \qquad \chi(\sigma) = \sqrt{[x'(\sigma)]^2 + [R'(\sigma)]^2}.$$

Первое уравнение системы (2) примет вид

$$v_1^c(\sigma_0) + \int_{d_0}^{d_N} (v_1^c T_{11}^c + v_2^c T_{21}^c + v_3^c T_{31}^s) R(\sigma)\chi(\sigma)d\sigma -$$

$$- \int_{d_0}^{d_N} (F_1^c V_{11}^c + F_2^c V_{21}^c + F_3^c V_{31}^s) R(\sigma)\chi(\sigma)d\sigma =$$

$$= \int_{d_0}^{d_N} (B_1^c V_{11}^c + B_2^c V_{21}^c + B_3^c V_{31}^s) R(\sigma)\chi(\sigma)d\sigma \text{ для } m = 0,1,...$$

Остальные уравнения преобразуются аналогично.

Таким образом, для тел вращения получена система одномерных интегральных уравнений, после решения которых по формулам вида (2) можно получить значения компонент вектора перемещений как на поверхности, так и внутри изотропного тела.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.* Метод граничных интегральных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.

2. *Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985. 280 с.

УДК 539.3

Э. В. Антоненко, Н. С. Хлопцева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

К тонкостенным элементам оболочечных конструкций относятся стрингеры, шпангоуты и обшивка. Физическими моделями этих элементов являются стержни, кольца и гладкая оболочка. Для снижения массы конструкции ее элементы могут выполняться геометрически неоднородными (с переменной по их периметру жесткостью или толщиной).

Математические модели потери устойчивости элементов можно разделить на две группы. В основе первой находятся решения задач на собственные значения дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях. Критические силы входят в коэффициенты этих уравнений. Будем называть такой метод расчета «точным».

Вторая группа математических моделей строится на базе прямых методов (с использованием законов сохранения в механике). Обычно используется условие безразличного равновесия, когда работа внутренних сил приравнивается работе внешних сил.

Критическую нагрузку потери устойчивости обозначим через p_*, прогибы – w, изгибную жесткость – D. Штрихами будем обозначать производные по осевой координате x или по угловой координате φ.

1. Потеря устойчивости при сжатии неоднородного стержня длиной l описывается уравнением

$$\left(D(x)w''(x)\right)'' + p_* w(x) = 0. \tag{1}$$

При дискретном и непрерывном изменении жесткости вдоль стержня имеется ряд решений этой задачи [1].

Энергетический метод позволяет найти критическую силу по формуле

$$p_* = \left(\int_0^l D(x)[w''(x)]^2\,dx\right) \Bigg/ \left(\int_0^l [w'(x)]^2\,dx\right), \tag{2}$$

где функции прогиба должны удовлетворять граничным условиям.