БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.* Метод граничных интегральных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 295 с.

2. *Федик И. И., Колесов В. С., Михайлов В. Н.* Температурные поля и термонапряжения в ядерных реакторах. М.: Энергоатомиздат, 1985. 280 с.

УДК 539.3

Э. В. Антоненко, Н. С. Хлопцева

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

К тонкостенным элементам оболочечных конструкций относятся стрингеры, шпангоуты и обшивка. Физическими моделями этих элементов являются стержни, кольца и гладкая оболочка. Для снижения массы конструкции ее элементы могут выполняться геометрически неоднородными (с переменной по их периметру жесткостью или толщиной).

Математические модели потери устойчивости элементов можно разделить на две группы. В основе первой находятся решения задач на собственные значения дифференциальных уравнений при заданных граничных условиях. Критические силы входят в коэффициенты этих уравнений. Будем называть такой метод расчета «точным».

Вторая группа математических моделей строится на базе прямых методов (с использованием законов сохранения в механике). Обычно используется условие безразличного равновесия, когда работа внутренних сил приравнивается работе внешних сил.

Критическую нагрузку потери устойчивости обозначим через p_*, прогибы – w, изгибную жесткость – D. Штрихами будем обозначать производные по осевой координате x или по угловой координате φ.

1. Потеря устойчивости при сжатии неоднородного стержня длиной l описывается уравнением

$$\left(D(x)w''(x)\right)'' + p_* w(x) = 0 . \qquad (1)$$

При дискретном и непрерывном изменении жесткости вдоль стержня имеется ряд решений этой задачи [1].

Энергетический метод позволяет найти критическую силу по формуле

$$p_* = \left(\int_0^l D(x)[w''(x)]^2 dx\right) \Big/ \left(\int_0^l [w'(x)]^2 dx\right), \qquad (2)$$

где функции прогиба должны удовлетворять граничным условиям.

Например, для составного стержня с двумя участками, на которых $D = D_1$ $(0 \le x \le l_1)$ и $D = D_2$ $(l_1 \le x \le l)$, целесообразно выбирать функцию прогиба как у однородного стержня. Из (2) можно получить $p_* = \kappa p_{*0}$, p_{*0} – критическая сила однородного стержня с жесткостью $D = D_1$ при заданных граничных условиях, $\kappa = \kappa(\bar{l}, \bar{D})$, где $\bar{l} = l_1 / l$, $\bar{D} = D_2 / D_1$. При шарнирном опирании

$$p_* = \kappa(m\pi / l)^2, \quad k = a + \bar{D}(1 - a), \quad a = \bar{l} + \left(\sin \pi \bar{l}\right) / \pi .$$

2. Потеря устойчивости неоднородного кольца радиуса R от радиальной нагрузки описывается дифференциальным уравнением пятого порядка [1] или полученным нами уравнением

$$w^{(4)} + 2\frac{D'}{D}w''' + (2 + \frac{D''}{D} + p_* \frac{R^3}{D})w'' + 2\frac{D'}{D}w' + (1 + \frac{D''}{D} + p_* \frac{R^3}{D})w = 0, \quad (3)$$

где $w = w(\varphi)$, $D = D(\varphi)$. Для замкнутого кольца $w = A\cos n\varphi$. Из (3) для однородного кольца следует известный результат

$$p_* = \left(n^2 - 1\right)D / R^3. \qquad (4)$$

Энергетический подход при $D = D_0 f(\varphi)$ позволяет получить

$$p_* = k\frac{\left(n^2 - 1\right)D}{R^3}, \quad k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\varphi)\cos^2 n\varphi \, d\varphi . \qquad (5)$$

Для однородного кольца ($D = D_0$, $k = 1$) из (5) следует (4).

При дискретном (ступенчатом) изменении жесткости, когда $D = D_1\left(0 \le \varphi < \alpha\right)$, $D = D_2\left(\alpha \le \varphi < \pi\right)$, имеем

$$D_0 = D_1, \quad k = N + \bar{D}(1 - N), \quad N = \alpha / \pi + \left(\sin 2n\alpha\right) / 2n\pi, \quad \bar{D} = D_2 / D_1 .$$

3. Потеря устойчивости цилиндрической оболочки средней длины с переменной толщиной $\delta(x)$ вдоль образующей описывается дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными коэффициентами [2].

Используя результаты [1, 4] при $w(x,\varphi) = \psi(x)\cos n\varphi$, получим

$$p_* = \frac{1}{I_3}\left[\left(n^2 - 1\right)I_1 + \frac{I_2}{n^4\left(n^2 - 1\right)}\right], \qquad (6)$$

$$I_3 = \int_0^l \psi^2(x)dx, \quad I_1 = \int_0^l DR^{-3}\psi^2(x)dx, \quad I_2 = \int_0^l E\delta R^3\left[\psi''(x)\right]^2 dx .$$

Для рассматриваемого класса оболочек минимизация (6) по n^2 приводит к выражению

$$p_* = 1{,}33\sqrt[4]{3I_1^3 I_2} / I_3 , \qquad (7)$$

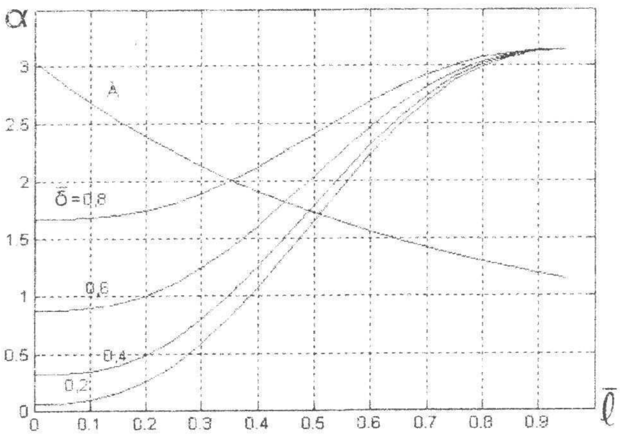
из которого как частный случай для оболочки с постоянной толщиной следуют результаты [3, 1, 4].

Если $\delta = \delta_0 f(x)$, из (7) можно получить

$$p_* = 0{,}293E\frac{R}{l}\left(\frac{\delta_0}{R}\right)^{2.5}\alpha,$$

где δ_0 – толщина оболочки в сечении $x=0$, коэффициент α учитывает граничные условия и закон изменения толщины оболочки по длине $f(x)$.

Для непрерывно меняющейся толщины $\delta=\delta_0 e^{-\sigma x}$ при шарнирном опирании краев оболочки на рисунке (кривая А) показан характер изменения $\alpha=\alpha(\bar{l})$, если $\bar{l}=bl$.



Из (7) для составной оболочки из двух отсеков с толщинами $\delta_1\,(0\le x\le l_1)$, $\delta_2\,(l_1\le x\le l)$ при различных граничных условиях получены зависимости для расчета $\alpha=\alpha(\bar{l},\bar{\delta})$, $\bar{l}=l_1/l$, $\bar{\delta}=\delta_2/\delta_1$. Результаты расчета для шарнирного опирания представлены на рисунке. Различие результатов расчета по (7) с результатами «точных» расчетов [2] не превышают 8% .

Математическая модель потери устойчивости, базирующаяся на прямых методах, позволяет относительно просто с достаточной для нужд расчетчика точностью на этапе эскизного проектирования оболочечной конструкции оценить влияние неоднородности на величины критических нагрузок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1974. 640 с.

2. *Антоненко Э. В., Хлопцева Н. С.* Критическое давление составных цилиндрических оболочек // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. Вып. 6. С. 156 – 158.

3. *Антоненко Э. В.* Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами // Прикл. механика. 1975. Т. 11, вып. 6. С. 44 – 50.

4. *Кан С. Н.* Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.

УДК 629

Ю. В. Афанасьева, Ю. Н. Челноков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Рассматривается задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА) как деформируемой фигуры. Эта задача формулируется как задача оптимального управления движением центра масс КА с подвижным правым концом траектории и сводится к краевой задаче принципа максимума Понтрягина. Для описания ориентации мгновенной орбиты КА используется новый кватернионный оскулирующий элемент орбиты, заменяющий собой три классических угловых элемента орбиты КА.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу: требуется построить ограниченное по модулю управление $\mathbf{p}$:

$$0 \le p \le p_{max} < \infty, \ \ p = |\mathbf{p}|, \tag{1}$$

переводящее КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]:

$$\begin{gathered} v_1^{\cdot} = c^2 r^{-3} - fMr^{-2} + p_1,\ r^{\cdot} = v_1,\ c^{\cdot} = rp_2, \\ \varphi_{tr}^{\cdot} = cr^{-2} + r(c^2 - fMr)^{-1}\cos\varphi_{tr}(cp_1\cos\varphi_{tr} - (c + fMrc^{-1})p_2\sin\varphi_{tr}), \\ 2(\boldsymbol{\Lambda}^{or})^{\cdot} = \boldsymbol{\Lambda}^{or} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi, \\ \boldsymbol{\Omega}_\xi = \Omega_1\mathbf{i}_1 + \Omega_2\mathbf{i}_2 + \Omega_3\mathbf{i}_3 = (r/c)p_3(\cos\varphi_{tr}\,\mathbf{i}_1 + \sin\varphi_{tr}\,\mathbf{i}_2) - \\ - r(c^2 - fMr)^{-1}\cos\varphi_{tr}(cp_1\cos\varphi_{tr} - (c + fMr/c)p_2\sin\varphi_{tr})\,\mathbf{i}_3, \end{gathered} \tag{2}$$

из заданного начального состояния

$$\begin{gathered} t_0 = 0,\ r(0) = r^0,\ v_1(0) = v_1^{\,0},\ c(0) = c^0,\ \varphi_{tr}(0) = \varphi_{tr}^{\,0}, \\ \Lambda_j^{or}(0) = (\Lambda_j^{or})^0 \ \ (j = 0..3) \end{gathered} \tag{3}$$

в конечное состояние, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{gathered} c(t_k) = c(0) = c_0,\ e_{or}(t_k) = e_{or}(0), \\ \Lambda_j^{or}(t_k) = \Lambda_j^*, \end{gathered} \tag{4}$$

и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{t_k} (1 + \alpha p^2(t))dt,\ \alpha = \mathrm{const} \ge 0.$$

В уравнениях (1) – (4) f – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела, $\mathbf{p}$ – вектор ускорения от тяги реактивного двигателя, v_1, r, c, φ_{tr}, $\boldsymbol{\Lambda}^{or}$ – фазовые координаты КА; v_1, r, c характеризуют форму и размеры мгновенной орбиты КА, угловая переменная φ_{tr} характеризует положение КА на орбите, $\boldsymbol{\Lambda}^{or}$ – кватернионный оскулирующий элемент ор-