3. *Антоненко Э. В.* Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами // Прикл. механика. 1975. Т. 11, вып. 6. С. 44 – 50.

4. *Кан С. Н.* Строительная механика оболочек. М.: Машиностроение, 1966. 508 с.

УДК 629

Ю. В. Афанасьева, Ю. Н. Челноков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОРИЕНТАЦИЕЙ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

Рассматривается задача оптимального управления ориентацией орбиты космического аппарата (КА) как деформируемой фигуры. Эта задача формулируется как задача оптимального управления движением центра масс КА с подвижным правым концом траектории и сводится к краевой задаче принципа максимума Понтрягина. Для описания ориентации мгновенной орбиты КА используется новый кватернионный оскулирующий элемент орбиты, заменяющий собой три классических угловых элемента орбиты КА.

1. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу: требуется построить ограниченное по модулю управление **p**:

$$0 \le p \le p_{max} < \infty,\ \ p = |\mathbf{p}|, \tag{1}$$

переводящее КА, движение центра масс которого описывается уравнениями [1]:

$$\begin{gathered} v_1^{\cdot} = c^2 r^{-3} - fMr^{-2} + p_1,\ r^{\cdot} = v_1,\ c^{\cdot} = rp_2, \\ \varphi_{tr}^{\cdot} = cr^{-2} + r(c^2 - fMr)^{-1}\cos\varphi_{tr}(cp_1\cos\varphi_{tr} - (c + fMrc^{-1})p_2\sin\varphi_{tr}), \\ 2(\boldsymbol{\Lambda}^{or})^{\cdot} = \boldsymbol{\Lambda}^{or} \circ \boldsymbol{\Omega}_\xi, \\ \boldsymbol{\Omega}_\xi = \Omega_1\mathbf{i}_1 + \Omega_2\mathbf{i}_2 + \Omega_3\mathbf{i}_3 = (r/c)p_3(\cos\varphi_{tr}\,\mathbf{i}_1 + \sin\varphi_{tr}\,\mathbf{i}_2) - \\ - r(c^2 - fMr)^{-1}\cos\varphi_{tr}(cp_1\cos\varphi_{tr} - (c + fMr/c)p_2\sin\varphi_{tr})\,\mathbf{i}_3, \end{gathered} \tag{2}$$

из заданного начального состояния

$$\begin{gathered} t_0 = 0,\ r(0) = r^0,\ v_1(0) = v_1^{\ 0},\ c(0) = c^0,\ \varphi_{tr}(0) = \varphi_{tr}^{\ 0}, \\ \Lambda_j^{or}(0) = (\Lambda_j^{or})^0\ \ (j = 0..3) \end{gathered} \tag{3}$$

в конечное состояние, удовлетворяющее соотношениям

$$\begin{gathered} c(t_k) = c(0) = c_0,\ e_{or}(t_k) = e_{or}(0), \\ \Lambda_j^{or}(t_k) = \Lambda_j^*, \end{gathered} \tag{4}$$

и минимизирующее функционал

$$J = \int_0^{t_k} (1 + \alpha p^2(t))dt,\ \alpha = \text{const} \ge 0.$$

В уравнениях (1) – (4) f – гравитационная постоянная, M – масса притягивающего тела, **p** – вектор ускорения от тяги реактивного двигателя, v_1, r, c, φ_{tr}, $\boldsymbol{\Lambda}^{or}$ – фазовые координаты КА; v_1, r, c характеризуют форму и размеры мгновенной орбиты КА, угловая переменная φ_{tr} характеризует положение КА на орбите, $\boldsymbol{\Lambda}^{or}$ – кватернионный оскулирующий элемент орбиты КА, характеризующий ее мгновенную ориентацию, e_{or} – эксцентриситет орбиты КА.

2. Необходимые условия оптимальности. Задачу решаем, используя принцип максимума Понтрягина. Вводим дополнительную переменную g, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $g^{\cdot} = 1 + \alpha p^2$ и начальному условию $g(0) = 0$. Вводим сопряжённые переменные ρ, s_1, e, χ_{tr}, M_j^{or} и ψ_0, соответствующие фазовым переменным r, v_1, c, φ_{tr}, Λ_j^{or} и переменной g. Функция Гамильтона – Понтрягина имеет вид

$$H = \psi_0(1 + \alpha p^2) + \rho v_1 + s_1(c^2 r^{-3} - fMr^{-2} + p_1) + erp_2 + \chi_{tr} cr^{-2} +$$
$$+ (\chi_{tr} - (1/2)N_3^{or})r(c^2 - fMr)^{-1}\cos\varphi_{tr}(cp_1\cos\varphi_{tr} - (c + fMrc^{-1})p_2\sin\varphi_{tr}) +$$
$$+ (1/2)(N_1^{or}\cos\varphi_{tr} + N_2^{or}\sin\varphi_{tr})rc^{-1}p_3, \qquad (5)$$

где N_1^{or}, N_2^{or}, N_3^{or} – компоненты кватерниона;

$$\mathbf{N}^{or} = N_0 + N_1\mathbf{i}_1 + N_2\mathbf{i}_2 + N_3\mathbf{i}_3 = \overline{\mathbf{\Lambda}^{or}} \circ \mathbf{M}^{or}$$

(здесь $\overline{\mathbf{\Lambda}^{or}} = \Lambda_0^{or} - \Lambda_1^{or}\mathbf{i}_1 - \Lambda_2^{or}\mathbf{i}_2 - \Lambda_3^{or}\mathbf{i}_3$ – кватернион, сопряженный к $\mathbf{\Lambda}^{or}$).

Сопряжённая система уравнений имеет вид

$$s_1^{\cdot} = -\rho,\ \rho^{\cdot} = F_1(s_1, c, r, \chi_{tr}, e, \mathbf{p}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}),\ e^{\cdot} = F_2(s_1, c, r, \chi_{tr}, \mathbf{p}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}),$$
$$\chi_{tr}^{\cdot} = F_3(c, r, \chi_{tr}, \mathbf{p}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}),$$
$$2(\mathbf{M}^{or})^{\cdot} = \mathbf{M}^{or} \circ \mathbf{\Omega}_{\xi}, \qquad (6)$$
$$\psi_0^{\cdot} = 0. \qquad (7)$$

В дальнейшем в силу однородности функции H относительно сопряженных переменных и уравнения (7) в выражении (5) для функции H положим $\psi_0 = -1$.

Оптимальное управление $\mathbf{p}^0$, найденное из условия максимума функции H, определяемой соотношением (5) по переменной $\mathbf{p}$ с учётом ограничения (1), имеет вид

$$\mathbf{p}_\eta^0 = p_1^0\mathbf{i}_1 + p_2^0\mathbf{i}_2 + p_3^0\mathbf{i}_3 = p^0\,\mathbf{n}_\eta / |\mathbf{n}|, \qquad (8)$$
$$\mathbf{n}_\eta = G_1(s_1, r, c, e, \chi_{tr}, \mathbf{N}^{or}, \varphi_{tr}),$$

где p^0 при $\alpha > 0$ определяется соотношениями:

$$p^0 = \begin{cases} (2\alpha)^{-1}|n|, \text{ если } (2\alpha)^{-1}|n| \le p_{\max}, \\ p_{\max}, \text{ если } (2\alpha)^{-1}|n| > p_{\max}, \end{cases} \qquad (9)$$

а при $\alpha = 0$ – соотношением

$$p^0 = p_{max}. \qquad (10)$$

Условия трансверсальности на правом конце траектории после исключения неопределенных множителей Лагранжа принимают вид

при $t = t_k$

$$\rho + s_1 v_1 r^{-1} = 0,$$
$$\chi_{tr} - s_1 v_1(\operatorname{ctg}\varphi_{tr} + v_1 rc^{-1}) = 0. \qquad (11)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию шестнадцати дифференциальных уравнений (2), (6) – (10) относительно переменных r, v_1, c, φ_{tr}, Λ_j, M_j ($j = 0..3$), ρ, s_1, e, χ_{tr}. При интегрировании уравнений появится шестнадцать произвольных постоянных интегрирования, семнадцатым неизвестным будет время t_k. Для определения постоянных и времени t_k

имеем семнадцать условий: четырнадцать граничных условий (3) – (4), два условия трансверсальности (11) и равенство гамильтониана нулю в конечный момент времени, имеющее место для оптимального управления p^0.

3. Анализ задачи. Уравнения задачи имеют первые интегралы:

$$\|\mathbf{\Lambda}^{or}\|^2 = 1,\ \|\mathbf{M}^{or}\|^2 = \text{const},\ H(r, v_1, c, \varphi_{tr}, \mathbf{\Lambda}^{or}, \rho, \chi_{tr}, \mathbf{M}^{or}, \mathbf{p}^0) = 0,$$

$$\mathbf{M}^{or} \circ \overline{\mathbf{\Lambda}^{or}} = \mathbf{N}^* = \text{const}.$$

Использование двух последних интегралов и кватернионной замены переменных $\mathbf{N}^{or} = \overline{\mathbf{\Lambda}^{or}} \circ \mathbf{M}^{or}$ позволяет понизить порядок системы на пять единиц без усложнения правых частей уравнений. Правые части уравнений (6) F_1, F_2, F_3 являются сложными функциями фазовых и сопряженных переменных. Анализ этих уравнений показал, что при выполнении условия $\chi_{tr} = (1/2)N_3^{or}$ уравнения и соотношения краевой задачи существенно упрощаются, а порядок системы понижается еще на единицу.

Заключение. В статье сформулирована краевая задача принципа максимума, к которой сводится задача оптимального управления ориентацией орбиты КА как деформируемой фигуры. Использование новой модели орбитального движения КА позволяет наиболее эффективно рассматривать общую задачу оптимального управления движением КА как композицию двух взаимосвязанных задач: задачи управления формой и размерами орбиты КА и задачи управления ориентацией орбиты КА, поскольку введенный новый кватернионный оскулирующий элемент непосредственно характеризует собой ориентацию мгновенной орбиты КА в отличие от других, ранее использованных кватернионных переменных. Получены первые интегралы уравнений краевой задачи, установлено условие, при выполнении которого уравнения краевой задачи существенно упрощаются.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Челноков Ю. Н.* Применение кватернионов в задачах оптимального управления движением центра масс космического аппарата в ньютоновском гравитационном поле. II // Космические исследования. 2003. Т. 41, № 1. С. 92 – 107.

УДК 517.958:536.2

К. Г. Бахтин, В. Ю. Ольшанский

ОЦЕНКА КОНВЕКТИВНЫХ ЧЛЕНОВ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕРМОРАСЩЕПЛЕНИЯ ГРАФИТА

Рассматривается математическая модель процесса получения термически расщепленного графита (ТРГ) из окисленного графитового порошка (ОГ) в металлической пресс-форме. Порошок ОГ равномерно распределен в заданной области и подвергается нагреву извне. При достижении критической температуры появляется подвижная граница раздела ОГ – ТРГ.