

Все вычисления проводились с помощью программного комплекса Mathcad. Численные результаты говорят о том, что формула (3) применима и для нелинейного закона растяжения нити. Связано это с тем, что на каждом отрезке $[\varepsilon_0, \varepsilon_0 + \varepsilon_i]$ нелинейная диаграмма хорошо аппроксимируется линейной функцией. Ценность формулы (3) состоит в том, что для определения силы предварительного натяжения эластичной структуры не нужно знать в явном виде диаграмму растяжения материала этой структуры.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гуляев Ю. П., Коссович Л. Ю. Математические модели биомеханики в медицине. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2001. 49 с.

УДК 533.6.011:539.5

В. В. Гурьянов, М. А. Бушлаева

СПЕКТРЫ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН РИМАНА В СРЕДАХ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Продольные плоские упругие волны конечных деформаций без учета влияния сил описываются дифференциальным уравнением [1]:

$$u_{tt} - v^2(u_x)u_{xx} = 0. \quad (1)$$

Здесь и далее нижние индексы (x, t) обозначают частные производные по этим переменным, $u = u(x, t)$. Смещение точек упругой среды $v^2(u_x) -$ квадрат скорости распространения волн.

Для спектрального анализа и возможности сопоставления результатов с полевыми наблюдениями в вибротсейсмозведке, полученных в НВ НИИГГ, волны, бегущие в направлении оси Ox (вглубь Земли), представляются в параметрической форме в функции параметра ζ так [1]:

$$u(x(\zeta), t) = u_0(\zeta) - (p(\zeta)v(p(\zeta)) + q(\zeta)(t - \zeta)),$$

$$t(\zeta, x) = \zeta + \frac{x}{v(p(\zeta))}. \quad (2)$$

Здесь t - время, $u(x, t)$ - смещение точек среды, $q(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t} = q(\zeta)$ - скорость смещения, $p = \frac{\partial u}{\partial x} = p(\zeta)$, $v(p(\zeta))$ - скорость распространения фронта волны вдоль оси Ox . Заметим, что q, p, v зависят только от параметра ζ ; q и v задаются, p вычисляется при $x=0$, когда $t=\zeta$. Это инварианты Римана и от x не зависят. Они связаны зависимостью

$$q' = -v(p(\zeta))p', \quad (3)$$

определяющей волну, бегущую в направлении оси Ox . Для изменения направления движения волны нужно сменить знак у скорости. Такие волны называются *простыми*, или *волнами Римана*.

Для спектрального анализа ограничимся степенным законом для квадрата скорости

$$v^2(p) = a + bp^n. \quad (4)$$

Здесь $a = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $g = \frac{\theta}{\rho}$, $\lambda + 2\mu$, θ – упругие параметры, ρ – плотность, λ , μ – модули Ламе. Параметры определяют продольную волну. Значение $n=1$ определяет квадратичную нелинейность, $n=2$ – кубичную нелинейность.

Известно, что спектры определяются интегралом Фурье:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (5)$$

При $x=0$ выполняется равенство $t = \zeta$, поэтому принимаем в (5) $q(t) = q(\zeta)$ и далее вследствие независимости q от x в формуле (5) полагаем $f(t) = q(\zeta)$, и формулу запишем следующим образом:

$$F(\omega; x) = \int_{-\infty}^{\infty} q(\zeta) e^{-i\omega t} dt. \quad (6)$$

В формуле (6)

$$t(\zeta, x) = \zeta + \frac{x}{v(p(\zeta))}, \quad dt = \left(1 - \frac{xp'}{v^2(p(\zeta))}\right) d\zeta. \quad (7)$$

Принимаем $q(\zeta) = \sin(k\zeta)$, а $p(\zeta)$ вычисляем методом Рунге – Кутты по уравнению

$$\frac{dp}{d\zeta} = \frac{q'(\zeta)}{v(\zeta)} = \frac{k \cos(k\zeta)}{\sqrt{a + bp^n}}. \quad (8)$$

На рис. 1, 2 представлены амплитудные спектры для квадратичной и кубичной нелинейностей. Видно, что появляются кратные исходной частоте $\omega=k$ гармоники 2ω , 3ω , 4ω , 5ω , ... в случае квадратичной нелинейности и 3ω , 5ω , 7ω , 9ω , ... – в случае кубичной. Штриховой линией показан спектр исходного сигнала.

На рис. 3 представлены амплитудные спектры, полученные по результатам наблюдений в поле. Видно полное совпадение теоретических и полевых частот. Разница в форме спектров обусловлена различной длительностью исходных сигналов.

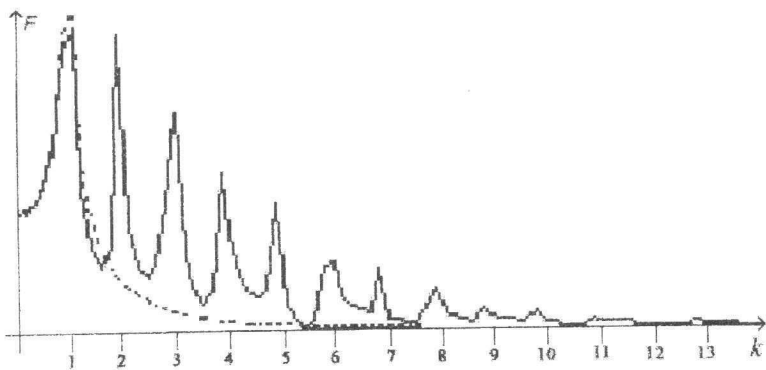


Рис. 1. Спектр сигнала для квадратичной нелинейности

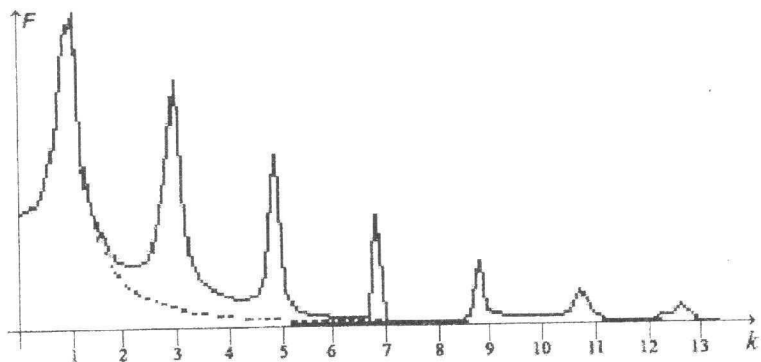


Рис. 2. Спектр сигнала для кубической нелинейности

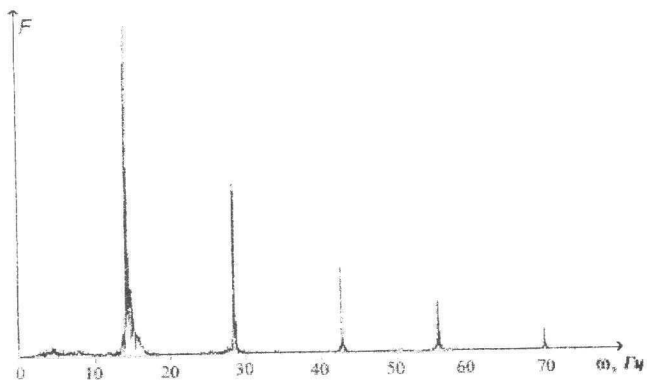


Рис. 3. Спектр сигнала по результатам полевых наблюдений

Таким образом, математическая модель позволяет сделать вывод о том, что наблюдения производились в среде с квадратичной нелинейностью, и эта модель адекватна натуре.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гурьянов В. В. Монотипные плоские изэнтропические волны конечных деформаций // Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций: Сб. науч. тр. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1993. Вып. 1. С. 150 – 157.

УДК 539.3

Д. В. Иванов

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ АОРТЫ

В статье приведены результаты решения нескольких краевых задач, связанных с течением трехмерной стационарной несжимаемой вязкой жидкости в каналах с жесткими и гибкими стенками. Последние из них моделируют движение крови в верхней части аорты человека. Решение получено с помощью пакета Femlab [1]. Femlab – среда для моделирования научных и технических проблем, основанных на дифференциальных уравнениях в частных производных (PDE). При решении PDE в Femlab применяются конечноэлементные методы [1].

Движение крови в модели части аорты с жесткими стенками

Течение крови описывается стационарной системой уравнений Навье – Стокса [2]

$$\begin{cases} (U \cdot \nabla)U + \text{grad } p - \nu \nabla^2 U = 0, \\ \text{div } U = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $U = (u, v, w)$.

На торцах модели задается давление втекающего и вытекающего потоков, на боковой поверхности – условия прилипания. Коэффициент динамической вязкости жидкости равен $0,005 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$, плотность – $1060 \text{ кг}/\text{м}^3$.

При решении задачи выбирается сетка с относительно малым количеством четырехгранников и более мелкая сетка (порядка 1000 и 11000 четырехгранников). Это сделано с целью сравнения решений, а также выявления качества расчетов.

В результате решения задачи получена картина линий тока (рис. 1).