Рассмотренный метод исследования колебательных процессов имеет значительное преимущество перед известными широко распространенными «неявными» схемами ввиду неограниченного разнообразия прилагаемых нагрузок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зылев В. Б.* Вычислительные методы в нелинейной механике конструкций. М.: Науч. издат. центр «Инженер», 1999. 145 с.

УДК 533.6.011

Д. Н. Коновалов, Г. Д. Севостьянов

УДАРНЫЙ ПЕРЕХОД СЛАБОСВЕРХЗВУКОВОЙ ОДНОРОДНОЙ СТРУИ В ДОЗВУКОВУЮ ВБЛИЗИ ЕЁ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Плоские стационарные околозвуковые безвихревые течения идеального газа описываются системой Фальковича – Кармана [1] ($u = M^2 - 1$, M – число Маха):

$$uu_x = v_y\,,\ v_x = u_y\,, \tag{1}$$

на околозвуковом скачке $x = h(y)$ имеем два условия:

$$g = h' = -[\,v\,]\,/\,[\,u\,]\,,\ (\,h'\,)^2 = \langle\,u\,\rangle\,, \tag{2}$$

где $[\,f\,]$, $\langle\,f\,\rangle$ – разность и полусумма значений f_+ и f_- разрывной на скачке функции f. Исключив в (2) h', имеем уравнение ударной поляры Буземана

$$[\,v\,]^2 = \langle\,u\,\rangle\,[\,u\,]^2. \tag{3}$$

Пусть однородная слабосверхзвуковая струя ($u = u_\infty = M^2_\infty - 1 \geq 0$, $v = v_\infty = 0$) вытекает из щели в стенке в область со сверхкритическим давлением $p_1 \geq p_*$. Направив ось x по стенке ($y = 0$, $x < 0$) в сторону течения, ось y перпендикулярно x вне струи, исследуем околозвуковое течение вблизи края щели $O(0,0)$, из которой выходят околозвуковой скачок OA и свободная дозвуковая граница струи OB ($u = u_s < 0$). Требуется найти решение $u < 0$, v системы (1) за неизвестным скачком OA, свободную границу OB (скачок OA криволинеен, если в струе за ним имеются возмущения, например преграда (рис. 1)).

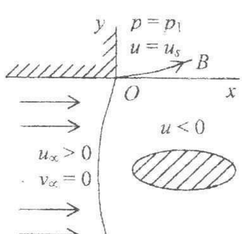

Рис. 1

Ударная поляра (3) является «ежевидной» («дикобраз» Буземана), если в однородном потоке скачок криволинейный. В [2] указана характерная точка S поляры, в которой наклон «иголки» $du/dv = 0$:

$$u = u_s = -3/5\ u_\infty < 0,\ |v| = |v_s| = 8/(5\sqrt{5})\ u^{3/2}_\infty. \tag{4}$$

На свободной дозвуковой границе постоянно давление ($p = p_1$), поэтому величина скорости не меняется, $u = u_s$.

Если за скачком поток однородный $u = u_s$, $v = v_s$ (преграда отсутствует), то скачок $OA°$ – косой ($x = \delta y$, $y \leq 0$), свободная граница $OB°$ струи прямолинейна ($v = v_s$, $u = u_s$).

Для этого нулевого приближения решения из условий (2) имеем

$$|\delta| = \sqrt{u_\infty}/\sqrt{5}. \tag{5}$$

Введя для кривого скачка OA неизвестную функцию $G(y)$, $y \leq 0$:

$$g(y) = \delta + G(y), \quad G(0) = 0,$$

запишем через нее из (2) решение на скачке OA:

$$u = u_{\text{ск}} = u_s + 4\delta G + 2G^2,$$
$$v = v_{\text{ск}} = v_s - 4/3\ u_s G - 6\delta G^2 - 2G^3. \tag{6}$$

Эту функцию и уравнение скачка OA будем искать в виде рядов:

$$G(y) = c_0 y + c_1 y^2 + c_2 y^3 + \ldots,$$
$$x = h(y) = \delta y + c_0/2\ y^2 + c_1/3\ y^3 + \ldots \tag{7}$$

Решение системы (1) с учетом условия на OB $u(x,0) = u_s < 0$ ищем в виде рядов вблизи края O:

$$u = u_s + B_0'\ y + u_s/6\ B_0'''\ y^3 + 1/12\ (B_0' B_0'')'\ y^4 + \ldots,$$
$$v = B_0 + u_s/2\ B_0''\ y^2 + 1/3\ B_0' B_0''\ y^3 + \ldots \tag{8}$$

с произвольной функцией $B_0(x)$:

$$B_0(x) = v_s + e_0 x + e_1 x^2 + e_2 x^3 + \ldots \tag{9}$$

Построим второе приближение системы (1):

$$u = u_s + e_0 y + 2e_1 xy + \ldots,$$
$$v = v_s + e_0 x + (e_1 x^2 + u_s e_1 y^2) + \ldots \tag{10}$$

Подставив (10) и (7) в (6), выразим коэффициенты $c_к$ и $e_к$ через параметры δ и $g_s = e_0 = v_x(0,0)$:

$$c_0 = g_s/(4\delta), \quad c_1 = 3/64\ g_s^2/\delta^3, \quad e_1 = 5/32\ g_s^2/\delta^3. \tag{11}$$

Тогда уравнение скачка OA у края щели примет вид

$$x = h(y) = \delta y + g_s/(8\delta)\ y^2 + g_s^2/(64\delta^3)\ y^3 + \ldots, \quad y \leq 0.$$

При $g_s = 0$ скачок – косой.

Поле скорости за скачком (второе приближение):

$$u = u_s + g_s y + 5/16\ g_s^2/\delta^3\ xy + \ldots,$$
$$v = v_s + g_s x + 5/32\ g_s^2/\delta^3\ (x^2 + u_s y^2) + \ldots \tag{12}$$

Величина скорости V, угол θ её наклона к оси x, коэффициент давления c_p – функции u или v ($\gamma > 1$ – отношение теплоемкостей), они равны:

$$V^2 = V^2_\infty\,[1 + 2(u - u_\infty)/(\gamma+1)M^{-2}_\infty]; \quad \theta = v/(\gamma+1)M^{-2}_\infty,$$
$$c_p = (p - p_\infty)/(1/2\ \rho_\infty V_\infty^2) = -2(u - u_\infty)/(\gamma+1)M^{-2}_\infty. \tag{13}$$

Эти зависимости можно записать в универсальной форме, используя закон околозвукового подобия:

$$X = |g_s|/|u_s|^{3/2}\ x, \quad Y = |g_s|/|u_s|\ y,$$
$$U = u/|u_s|, \quad V = v/|u_s|^{3/2}, \quad \varepsilon_g = \operatorname{sign} g_s = \pm 1, \quad \varepsilon_\delta = \operatorname{sign} \delta = \pm 1,$$
$$V = 8/(3\sqrt{3}) + \varepsilon_g X + 5/(32\sqrt{3})\ \varepsilon_g X^2 - 15/(32\sqrt{3})\ \varepsilon_\delta Y^2 + \ldots,$$
$$U = -1 + \varepsilon_g Y + 15\sqrt{3}/16\ \varepsilon_\delta XY + \ldots,$$

$$X = H(Y) = \varepsilon_\delta/\sqrt{3}\,Y + \sqrt{3}/8\ \varepsilon_\delta\varepsilon_g Y^2 + 3\sqrt{3}/64\ \varepsilon_\delta Y^3 + \ldots \qquad (14)$$

Уравнение свободной дозвуковой границы OB:

$$y = [(\gamma+1)M^2_\infty]^{-1}[v_s x + g_s/2\,x^2 + 5/96\,g_s^{\,2}/\delta^3\,x^3 + \ldots].$$

На рис. 2 показаны изобары течения (т.е. $U = \text{const}$) для $\delta > 0$, $g_s > 0$.

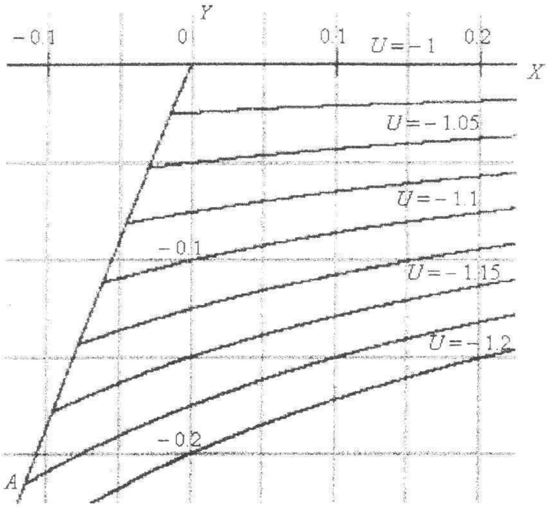

Рис. 2

При решении (14) использован метод ускорения сходимости рядов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Севостьянов Г. Д.* Основы теории околозвуковых течений газа. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. Ч. 1.

2. *Гудерлей К. Г.* Теория околозвуковых течений / Пер. с нем. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

УДК 539.3

В. И. Копнина, М. В. Демина

ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО КРУГУ МЕНЬШЕГО РАДИУСА

Рассмотрим круглую плиту радиуса $r = a$, изготовленную из изотропного материала (рисунок). Будем считать, что она изгибается под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по кругу меньшего радиуса, при этом край плиты жестко защемлен. В силу того что плита загружена таким образом, можно считать, что она состоит из двух час-