

$$X = H(Y) = \varepsilon_8/\sqrt{3} Y + \sqrt{3}/8 \varepsilon_8 \varepsilon_g Y^2 + 3\sqrt{3}/64 \varepsilon_8 Y^3 + \dots \quad (14)$$

Уравнение свободной дозвуковой границы  $OB$ :

$$y = [(\gamma+1)M_\infty^2]^{-1} [v_s x + g_s/2 x^2 + 5/96 g_s^2/\delta^3 x^3 + \dots].$$

На рис. 2 показаны изобары течения (т.е.  $U = \text{const}$ ) для  $\delta > 0$ ,  $g_s > 0$ .

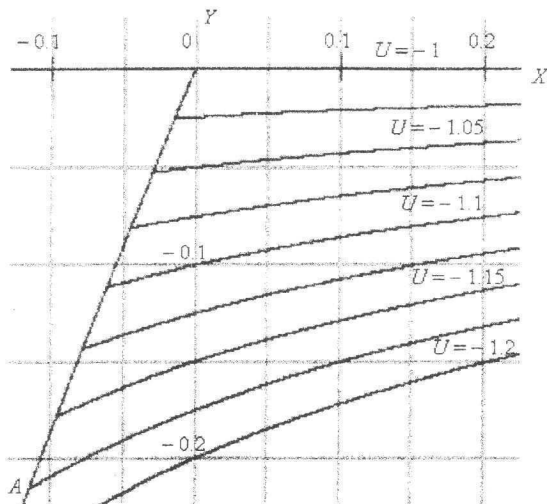


Рис. 2

При решении (14) использован метод ускорения сходимости рядов.

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Севостьянов Г. Д. Основы теории околозвуковых течений газа. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. Ч. 1.
2. Гудерлей К. Г. Теория околозвуковых течений / Пер. с нем. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.

УДК 539.3

В. И. Копнина, М. В. Демина

### ИЗГИБ КРУГЛОЙ ПЛИТЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНОЙ НАГРУЗКИ, РАВНОМЕРНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ПО КРУГУ МЕНЬШЕГО РАДИУСА

Рассмотрим круглую плиту радиуса  $r = a$ , изготовленную из изотропного материала (рисунок). Будем считать, что она изгибается под действием нормальной нагрузки, равномерно распределенной по кругу меньшего радиуса, при этом край плиты жестко зацементирован. В силу того что плита нагружена таким образом, можно считать, что она состоит из двух час-

тей: внутреннего круга радиуса  $r = b$ , нагруженного нормальной нагрузкой, (II) и внешнего кольца шириной  $(a - b)$  (I). Тогда все величины, характеризующие состояние кольца, будем обозначать индексом I сверху, а величины, характеризующие состояние круга – индексом II сверху. Так как у нас интенсивность нормальной нагрузки  $q = \text{const}$ , то мы имеем осесимметричное нагружение плиты.

Математическая модель такой задачи включает в себя уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 W^{\text{II}} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 W^{\text{I}} = 0 \quad (2)$$

и дополнительные условия:

граничные условия: при  $r = a$   $W^{\text{I}} = W^{\text{I}'} = 0$ ;

контактные условия на контуре сопряжения плит (условия неразрывности плиты):

$$\text{при } r = b \quad W^{\text{I}} = W^{\text{II}}; \quad M_r^{\text{I}} = M_r^{\text{II}};$$

$$W_r^{\text{I}} = W_r^{\text{II}}; \quad N_r^{\text{I}} = N_r^{\text{II}}.$$

Здесь  $W^l$  ( $l = \text{I, II}$ ) – функция прогиба,  $D$  – жесткость материала, из которого изготовлена плита,  $q$  – интенсивность нормальной нагрузки,  $M_r$  – изгибающий момент, действующий на площадке с нормалью  $r$  (поскольку пластинка круглая, введем в рассмотрение полярную систему координат),  $N_r$  – перерезывающая сила, действующая на той же площадке.

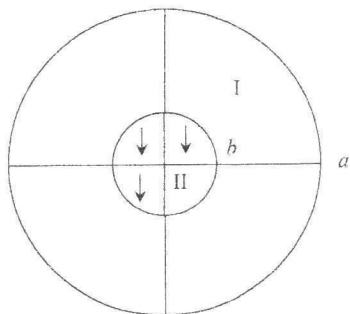
Так как у нас нагружение осесимметричное, то уравнения (1), (2) можно проинтегрировать и получить представления для  $W^{\text{I}}$  и  $W^{\text{II}}$ :

$$W^{\text{I}} = A^{\text{I}} + B^{\text{I}} r^2 + C^{\text{I}} \ln r + E^{\text{I}} r^2 \ln r,$$

$$W^{\text{II}} = A^{\text{II}} + B^{\text{II}} r^2 + C^{\text{II}} \ln r + E^{\text{II}} r^2 \ln r + \frac{qr^4}{64D}.$$

Имеем 6 условий и 8 неизвестных коэффициентов, так как из физических соображений ясно, что в центре прогиб и моменты не могут быть бесконечно большие  $\Rightarrow C^{\text{II}} = E^{\text{II}} = 0$ . Оставшиеся коэффициенты определим из граничных и контактных условий, учитывая, что в нашем случае равенство моментов равносильно равенству вторых производных функций  $W^l$  ( $l = \text{I, II}$ ), а равенство перерезывающих сил равносильно равенству третьих производных функций  $W^l$  ( $l = \text{I, II}$ ). Это приводит нас к системе, состоящей из 6 уравнений:

$$A^{\text{I}} + B^{\text{I}} a^2 + C^{\text{I}} \ln a + E^{\text{I}} a^2 \ln a = 0,$$



$$2B^I + \frac{C^I}{a^2} + E^I(2\ln a + 1) = 0,$$

$$A^{II} + B^{II}b^2 + \frac{qb^4}{64D} = A^I + B^Ib^2 + C^I \ln b + E^Ib^2 \ln b,$$

$$2B^{II} + \frac{qb^2}{16D} = 2B^I + \frac{C^I}{b^2} + E^I(2\ln b + 1),$$

$$2B^{II} + \frac{3qb^2}{16D} = 2B^I - \frac{C^I}{b^2} + E^I(2\ln b + 3),$$

$$\frac{3qb^2}{16D} = \frac{C^I}{b^2} + E^I.$$

Решим эту систему аналитически, а затем через найденные коэффициенты получим представления для моментов и перерезывающих сил:

$$M_r^I = (1 + \nu) \left( \frac{qb^4}{16a^2} + \frac{qb^2}{4} \ln \frac{a}{r} + \frac{qb^2}{8} \right) + (1 - \nu) \frac{qb^4}{16r^2} - (3 + \nu) \frac{qb^2}{8},$$

$$M_r^{II} = (1 + \nu) \left[ \frac{qb^4}{16} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{qb^2}{4} \left( \ln \frac{a}{b} - 1 \right) + \frac{3qb^2}{16} \right] - (3 + \nu) \frac{qr^2}{16},$$

$$M_\theta^I = (1 + \nu) \left( \frac{qb^4}{16a^2} + \frac{qb^2}{4} \ln \frac{a}{r} + \frac{qb^2}{8} \right) - (1 - \nu) \frac{qb^4}{16r^2} - (1 + 3\nu) \frac{qb^2}{8},$$

$$M_\theta^{II} = (1 + \nu) \left[ \frac{qb^4}{16} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{qb^2}{4} \left( \ln \frac{a}{b} - 1 \right) + \frac{3qb^2}{16} \right] - (1 + 3\nu) \frac{qr^2}{16},$$

$$N_r^I = -\frac{qb^2}{2r}, \quad N_r^{II} = -\frac{qr}{2}.$$

При  $r = b$  получаем

$$M_r^I = M_r^{II} = \frac{qb^2}{16} \left[ (1 + \nu) \frac{b^2}{a^2} + 4(1 + \nu) \ln \frac{a}{b} - 3 - \nu \right], \quad N_r^I = N_r^{II} = -\frac{qb}{2}.$$

Два последних равенства дают основания полагать, что выражения для моментов и перерезывающих сил получены верно. Таким образом, можно получить значения  $W$ ,  $M_r$ ,  $M_\theta$ ,  $N_r$  в любой точке плиты.

Результаты вычислений при  $b = 1$ ,  $a = 3$ ,  $D = 3.52$ ,  $\nu = 0.13$ ,  $q = 1$  приведены в таблице.

Координаты Точек	$W$	$M_r$	$N_r$	$M_\theta$
(0,0)	0.125	0.315	0	0.316
(1,0)	0.090	0.119	-0.500	0.236
(1,0)	0.090	0.119	-0.500	0.226
(3,0)	0	-0.200	-0.160	0.973

Анализ полученных значений показывает, что граничные и контактные условия выполняются, максимального значения функция прогиба достигает в центре плиты, максимальным изгибающим моментом является  $M_\theta$  на контуре плиты при  $r = a$ .

#### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров А. Я. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 4. С. 754 – 757.
2. Беленький М. Я. Некоторые осесимметричные задачи теории упругости // Прикл. математика и механика. 1960. Т. XXIV, вып. 3. С. 582 – 584.
3. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

УДК 539.3

В. И. Копнина, А. С. Щербаков

### ИЗГИБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ С ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим упругое равновесие тонкой эллиптической анизотропной плиты, ослабленной одним эллиптическим отверстием, которое подкреплено эллиптическим кольцом из другого анизотропного материала. Центр отверстия совпадает с центром плиты. Толщина кольца равна толщине плиты  $h$ ; ширина кольца достаточная, чтобы к кольцу можно было применить теорию изгиба плит.

Плита находится под действием изгибающих моментов интенсивности  $M$ , равномерно распределенных по внешнему контуру. Внутренний контур составной плиты свободен. Определим НДС такой плиты. Считаем материал пластинки анизотропным, обладающим одной плоскостью упругой симметрии, параллельной срединной плоскости плиты. Выберем систему координат следующим образом: пусть плоскость  $XOY$  совпадает со срединной плоскостью плиты, ось  $OZ$  направлена вертикально вниз.

Обозначим:

$L_0^{(v)}$  – внешний контур  $v$ -го кольца – эллипс с полуосями  $a_0^{(v)}$ ,  $b_0^{(v)}$  (здесь и далее  $v = I, II$ );

$L_1^{(v)}$  – внутренний контур  $v$ -го кольца – эллипс с полуосями  $a_1^{(v)}$ ,  $b_1^{(v)}$ .

Задача об изгибе такой плиты сводится к определению функций  $W^{(v)}(x,y)$ , представляющих прогиб срединной плоскости  $v$ -го кольца.

Искомые функции  $W^{(v)}(x,y)$  удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям в частных производных 4-го порядка [1]:

$$D_{11}^{(v)} \frac{\partial^4 W^{(v)}}{\partial X^4} + 4D_{16}^{(v)} \frac{\partial^4 W^{(v)}}{\partial X^3 \partial Y} + 2(D_{12}^{(v)} + 2D_{66}^{(v)}) \frac{\partial^4 W^{(v)}}{\partial X^2 \partial Y^2} +$$