Анализ получившихся значений показывает, что граничные и контактные условия выполняются, максимального значения функция прогиба достигает в центре плиты, максимальным изгибающим моментом является M_θ на контуре плиты при $r = a$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Александров А. Я.* Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций // Докл. АН СССР. 1959. Т. 129, № 4. С. 754 – 757.

2. *Беленький М. Я.* Некоторые осесимметричные задачи теории упругости // Прикл. математика и механика. 1960. Т. XXIV, вып. 3. С. 582 – 584.

3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.

УДК 539.3

В. И. Копнина, А. С. Щербаков

ИЗГИБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛИТЫ С ОТВЕРСТИЕМ

Рассмотрим упругое равновесие тонкой эллиптической анизотропной плиты, ослабленной одним эллиптическим отверстием, которое подкреплено эллиптическим кольцом из другого анизотропного материала. Центр отверстия совпадает с центром плиты. Толщина кольца равна толщине плиты h; ширина кольца достаточная, чтобы к кольцу можно было применить теорию изгиба плит.

Плита находится под действием изгибающих моментов интенсивности M, равномерно распределенных по внешнему контуру. Внутренний контур составной плиты свободен. Определим НДС такой плиты. Считаем материал пластинки анизотропным, обладающим одной плоскостью упругой симметрии, параллельной срединной плоскости плиты. Выберем систему координат следующим образом: пусть плоскость XOY совпадает со срединной плоскостью плиты, ось OZ направлена вертикально вниз.

Обозначим:

$L_0^{(\nu)}$ – внешний контур ν-го кольца – эллипс с полуосями $a_0^{(\nu)}$, $b_0^{(\nu)}$ (здесь и далее $\nu = \text{I}, \text{II}$);

$L_1^{(\nu)}$ – внутренний контур ν-го кольца – эллипс с полуосями $a_1^{(\nu)}$, $b_1^{(\nu)}$.

Задача об изгибе такой плиты сводится к определению функций $W^{(\nu)}(x,y)$, представляющих прогиб срединной плоскости ν-го кольца.

Искомые функции $W^{(\nu)}(x,y)$ удовлетворяют однородным дифференциальным уравнениям в частных производных 4-го порядка [1]:

$$D_{11}^{(\nu)}\frac{\partial^4 W^{(\nu)}}{\partial X^4} + 4D_{16}^{(\nu)}\frac{\partial^4 W^{(\nu)}}{\partial X^3 \partial Y} + 2(D_{12}^{(\nu)} + 2D_{66}^{(\nu)})\frac{\partial^4 W^{(\nu)}}{\partial X^2 \partial Y^2} +$$

$$+4D_{26}^{(\nu)}\frac{\partial^4 W^{(\nu)}}{\partial X \partial Y^3}+D_{22}^{(\nu)}\frac{\partial^4 W^{(\nu)}}{\partial Y^4}=0 \qquad (1)$$

и следующим граничным и контактным условиям [1]:

1) на контуре $L_1^{(\mathrm{II})}$:

$$M_n^{(\mathrm{II})}=0,\ N_n^{(\mathrm{II})}+\frac{\partial H_{nt}^{(\mathrm{II})}}{\partial S}=0; \qquad (2)$$

2) на контуре $L_0^{(\mathrm{I})}$:

$$M_n^{(\mathrm{I})}=M,\ N_n^{(\mathrm{I})}+\frac{\partial H_{nt}^{(\mathrm{I})}}{\partial S}=0; \qquad (3)$$

3) на контуре спая $L_0^{(\mathrm{II})}=L_1^{(\mathrm{I})}$:

$$W^{(\mathrm{II})}=W^{(\mathrm{I})};\ \frac{\partial W^{(\mathrm{II})}}{\partial n}=\frac{\partial W^{(\mathrm{I})}}{\partial n};\ M_n^{(\mathrm{II})}=M_n^{(\mathrm{I})};N_n^{(\mathrm{II})}=N_n^{(\mathrm{I})}. \qquad (4)$$

В уравнении (1) $D_{kj}^{(\nu)}$ – жесткости материалов, из которых изготавливаются кольца. В граничных условиях (2) – (4) n – внешняя нормаль к соответствующим контурам; $M_n^{(\nu)}$ – изгибающий момент, действующий на площадке с нормалью n в соответствующем кольце; $N_n^{(\nu)}$ – перерезывающая сила, действующая в ν-м кольце на площадке с нормалью n; $N_n^{(\nu)}+\frac{\partial H_{nt}^{(\nu)}}{\partial S}$ – обобщённая перерезывающая сила, действующая в ν-м кольце на площадке с нормалью n.

Для решения поставленной задачи используем метод комплексных потенциалов, предложенный С. Г. Лехницким. Согласно этому методу, искомые функции $W^{(\nu)}(x,y)$ могут быть представлены в виде [1]

$$W^{(\nu)}(x,y)=2\,\mathrm{Re}[\,W_1^{(\nu)}(z_1^{(\nu)})+W_2^{(\nu)}(z_2^{(\nu)})\,]\ \ (j=1,2;\ \nu=\mathrm{I},\mathrm{II}). \qquad (5)$$

Здесь $W_j^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ – произвольные аналитические функции, определенные в соответствующих плоскостях $z_j^{(\nu)}$. Тогда функции $W_j^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ будут удовлетворять следующим граничным и контактным условиям [2]:

$$2\mathrm{Re}\left[\frac{p_1^{(\nu)}}{\mu_1^{(\nu)}}W_1^{(\nu)\prime}(t_1)+\frac{p_2^{(\nu)}}{\mu_2^{(\nu)}}W_2^{(\nu)\prime}(t_2)\right]=F_1^{(\nu)};$$

$$2\mathrm{Re}[q_1^{(\nu)}W_1^{(\nu)\prime}(t_1)+q_2^{(\nu)}W_2^{(\nu)\prime}(t_2)]=F_2^{(\nu)}; \qquad (6)$$

здесь на $L_0^{(\mathrm{I})}$ $\nu=1$, $F_1^{(\mathrm{I})}=-My$, $F_2^{(\mathrm{I})}=-Mx$; на $\mathrm{L}_1^{(\mathrm{II})}$ $\nu=2$, $F_1^{(\mathrm{II})}=F_2^{(\mathrm{II})}=0$;

$$2\mathrm{Re}[W_1^{(\mathrm{I})\prime}(t_1)+W_2^{(\mathrm{I})\prime}(t_2)]=2\mathrm{Re}[W_1^{(\mathrm{II})\prime}(t_1)+W_2^{(\mathrm{II})\prime}(t_2)],$$

$$2\mathrm{Re}\left[\mu_1^{(\mathrm{I})}W_1^{(\mathrm{I})\prime}(t_1)+\mu_2^{(\mathrm{I})}W_2^{(\mathrm{I})\prime}(t_2)\right]=2\mathrm{Re}\left[\mu_1^{(\mathrm{II})}W_1^{(\mathrm{II})\prime}(t_1)+\mu_2^{(\mathrm{II})}W_2^{(\mathrm{II})\prime}(t_2)\right], \qquad (7)$$

$$2\mathrm{Re}\left[\frac{p_1^{(\mathrm{I})}}{\mu_1^{(\mathrm{I})}}W_1^{(\mathrm{I})\prime}(t_1)+\frac{p_2^{(\mathrm{I})}}{\mu_2^{(\mathrm{I})}}W_2^{(\mathrm{I})\prime}(t_2)\right]=2\mathrm{Re}\left[\frac{p_1^{(\mathrm{II})}}{\mu_1^{(\mathrm{II})}}W_1^{(\mathrm{II})\prime}(t_1)+\frac{p_2^{(\mathrm{II})}}{\mu_2^{(\mathrm{II})}}W_2^{(\mathrm{II})\prime}(t_2)\right],$$

$2\mathrm{Re}\left[q_1^{(\mathrm{I})}W_1^{(\mathrm{I})\prime}(t_1)+q_2^{(\mathrm{I})}W_2^{(\mathrm{I})\prime}(t_2)\right]=2\mathrm{Re}\left[q_1^{(\mathrm{II})}W_1^{(\mathrm{II})\prime}(t_1)+q_2^{(\mathrm{II})}W_2^{(\mathrm{II})\prime}(t_2)\right]$ на контуре спая.

Согласно В. В. Меглинскому, искомые функции $W_j^{(\nu)}(z_j^{(\nu)})$ выбираем так, чтобы их производные имели вид

$$W_j^{(\nu)\prime}(z_j^{(\nu)}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{jk}^{(\nu)}}{\left[\zeta_1(z_j^{(\nu)})\right]^k} + \sum_{k=1}^{\infty} C_{jk}^{(\nu)} P_{k0}^{(\nu)}(z_j^{(\nu)}). \tag{8}$$

Здесь $A_{jk}^{(\nu)}$, $C_{jk}^{(\nu)}$ – комплексные постоянные, подлежащие определению из граничных условий.

Поступая аналогично В. В. Меглинскому, поставленную задачу можно свести к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
\alpha_{1n}^{(I)}\left[\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{1kl}^{(I)}A_{1l}^{(I)} + C_{1k}^{(I)}m_{10}^{(I)k}\right] + \alpha_{2n}^{(I)}\left[\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{2kl}^{(I)}A_{2l}^{(I)} + C_{2k}^{(I)}m_{20}^{(I)k}\right] + \\
+\left[\overline{\alpha}_{1n}^{(I)}\overline{C}_{1k}^{(I)} + \overline{\alpha}_{2n}^{(I)}\overline{C}_{2k}^{(I)}\right] = \gamma_{kn}^{(I)};
\end{gathered}$$

$$\alpha_{j1}^{(I)} = \frac{p_j^{(I)}}{\mu_j^{(I)}};\ \alpha_{j2}^{(I)} = q_j^{(I)};\ \gamma_{11}^{(I)} = -M\frac{b_0^{(I)}i}{2};\ \gamma_{12}^{(I)} = -M\frac{a_0^{(I)}}{2};\ \gamma_{kn}^{(I)} = 0; k \ge 3;\ n = 1,2;$$

$$\begin{gathered}
\beta_{1n}^{(II)}\sum_{l=1}^{\infty}\psi_{1kl}^{(II)}C_{1l}^{(II)} + \beta_{2n}^{(II)}\sum_{l=1}^{\infty}\psi_{2kl}^{(II)}C_{2l}^{(II)} + \overline{\beta}_{1n}^{(II)}\left[\overline{A}_{1k}^{(II)} + \sum_{l=1}^{\infty}\overline{\psi}_{1kl}^{(II)}\overline{C}_{1l}^{(II)}\overline{m}_{11}^{(II)k}\right] + \\
+\overline{\beta}_{2n}^{(II)}\left[\overline{A}_{2k}^{(II)} + \sum_{l=1}^{\infty}\overline{\psi}_{2kl}^{(II)}\overline{C}_{2l}^{(II)}\overline{m}_{21}^{(II)k}\right] = 0; \\
\beta_{j1}^{(II)} = \frac{p_j^{(II)}}{\mu_j^{(II)}};\ \beta_{j2}^{(II)} = q_j^{(II)};\ n = 1,2;
\end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered}
\delta_{1n}^{(\nu)}\sum_{l=1}^{\infty}\psi_{1kl}^{(\nu)}C_{1k}^{(\nu)} + \delta_{2n}^{(\nu)}\sum_{l=1}^{\infty}\psi_{2kl}^{(\nu)}C_{2k}^{(\nu)} + \overline{\delta}_{1n}^{(\nu)}\left[\overline{A}_{1k}^{(\nu)} + \sum_{l=1}^{\infty}\overline{\psi}_{1kl}^{(\nu)}\overline{C}_{1k}^{(\nu)}\overline{m}_{11}^{(\nu)k}\right] + \\
+\overline{\delta}_{2n}^{(\nu)}\left[\overline{A}_{2k}^{(\nu)} + \sum_{l=1}^{\infty}\overline{\psi}_{2kl}^{(\nu)}\overline{C}_{2k}^{(\nu)}\overline{m}_{21}^{(\nu)k}\right] - \delta_{1n}^{(\nu+1)}\left[\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{1kl}^{(\nu+1)}A_{1l}^{(\nu+1)} + C_{1k}^{(\nu+1)}m_{10}^{(\nu+1)k}\right] - \\
-\delta_{2n}^{(\nu+1)}\left[\sum_{l=1}^{\infty}\varphi_{2kl}^{(\nu+1)}A_{2l}^{(\nu+1)} + C_{2k}^{(\nu+1)}m_{20}^{(\nu+1)k}\right] - \overline{\delta}_{1n}^{(\nu+1)}\overline{C}_{1k}^{(\nu+1)} - \overline{\delta}_{2n}^{(\nu+1)}\overline{C}_{2k}^{(\nu+1)} = 0; \\
\nu = 1;\ n = 1,2,3,4;
\end{gathered}$$

$$\delta_{j1}^{(\nu)} = 1;\ \delta_{j2}^{(\nu)} = \mu_j^{(\nu)};\ \delta_{j3}^{(\nu)} = \frac{p_j^{(\nu)}}{\mu_j^{(\nu)}};\ \delta_{j4}^{(\nu)} = q_j^{(\nu)};\ \nu = 1,2.$$

Численные результаты были получены для случая, когда материалы колец ортотропные и различные. В этом случае $\mu_2^{(\nu)} = -\overline{\mu}_1^{(\nu)}$, тогда коэффициенты в представлении искомых функций связаны следующими соотношениями: $A_{2k}^{(\nu)} = \overline{A}_{1k}^{(\nu)}$, $C_{2k}^{(\nu)} = \overline{C}_{1k}^{(\nu)}$, $m_{2k}^{(\nu)} = \overline{m}_{1k}^{(\nu)}$, $R_{2k}^{(\nu)} = \overline{R}_{1k}^{(\nu)}$ (k=0,1); жесткости $D_{16}^{(\nu)}=D_{26}^{(\nu)}=0$; $D_1^{(\nu)}=D_{11}^{(\nu)}$; $D_2^{(\nu)}=D_{22}^{(\nu)}$; $D_3^{(\nu)}=D_{12}^{(\nu)}+2D_{66}^{(\nu)}$; $D_k^{(\nu)}=D_{66}^{(\nu)}$.

Вследствие этого количество неизвестных решаемой задачи уменьшится в 2 раза. Для получения численных результатов поставленной задачи система уравнений (9) была сокращена до 24 уравнений, что соответствует $k = 5$. Это можно сделать, так как эта система квазирегулярна. Используя полученное решение, по известным формулам можно определить прогибы и изгибающие моменты в некоторых точках рассматриваемой плиты [2].

В качестве примера была рассмотрена плита, составленная из двух вложенных друг в друга круглых колец. При этом предполагалось, что внешнее кольцо изготовлено из СВАМа [2], а внутреннее – из материала, жесткости которого в два раза больше соответствующих жесткостей СВАМа. Часть полученных результатов приведена в таблице.

Контур	θ	W	M_r	M_θ
$L_0^{(I)}$	0^0	–3.1233	0.9985	0.9967
	45^0	–3.1317	0.9957	0.5001
	90^0	–3.1790	0.9927	–0.9976
$L_0^{(II)} = L_1^{(I)}$	0^0	–0.0890	1.5142	0.8051
		–0.0890	1.5142	1.4681
	45^0	–0.0719	1.3356	1.0760
		–0.0681	1.3418	1.4506
	90^0	–0.0457	0.3871	–0.8969
		–0.0420	0.4000	–1.4736
$L_1^{(II)}$	0^0	–0.0160	0.0073	3.7380
	45^0	–0.0187	0.0010	2.5632
	90^0	–0.0293	0.0032	–2.5851

Анализ полученных результатов показывает, что граничные условия на внутреннем и внешнем контурах, а также на контуре спая выполняются с достаточной степенью точности. Прогиб достигает своего наибольшего значения в точках загруженного контура $L_0^{(I)}$. Максимальное значение изгибающий момент принимает на контуре отверстия, и этим моментом является момент M_θ.

Таким образом, можно считать, что полученные результаты соответствуют физической постановке задачи.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. М.: Гостехиздат, 1975.

2. *Меглинский В. В.* Некоторые задачи изгиба тонких многосвязных анизотропных плит // Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформаций упругих тел. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1967. Вып. 3. С. 97 – 127.