

$$\alpha^v = \sqrt{1-m^2} + \frac{m}{\sqrt{2}} \left(\arctg \frac{\sqrt{m^2+8-3m}}{2\sqrt{2}\sqrt{1-m^2}} - \arctg \frac{\sqrt{m^2+8+m}}{2\sqrt{2}} \right), \quad (15)$$

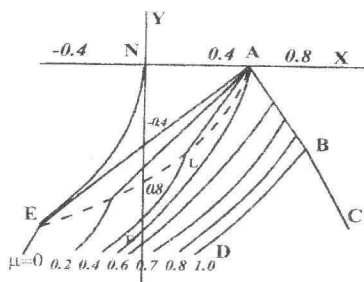


Рис. 3

связывающее исходный параметр α^v и m .

На рис. 3 в плоскости X,Y изображена картина нерегулярной рефракции ударной волны в воде со значением исходного параметра $\alpha^v = 0.5$. Линии равных значений давления (совпадающие с линиями $\mu = \text{const}$) построены согласно решениям (10) при $m=0.667$, $\mu^*=0.555$, (12), (14) из [1].

Построенное численное решение качественно и достаточно точно согласуется с аналитическим решением, которое было построено в [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Шиндяпин Г. П. Численное решение задачи нерегулярного отражения слабой ударной волны от жесткой стенки в идеальном газе // ЖВМ и МФ. 1980. № 1. С. 249 – 254.
2. Шиндяпин Г. П., Матутин А. А. Аналитическое исследование ударно-волновых структур при нелинейной рефракции ударных волн на поверхности, разделяющей газовую и газожидкостную среды // Механика и процессы управления: Сб. науч. тр. Екатеринбург: УРОРАН, 2004. С. 190 – 197.

УДК 533.6.011

Е. О. Немцова, И. А. Чернов

ПОЛУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ ТРАНСЗВУКОВЫХ РЕШЕНИЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

В статье рассматривается параметрический метод Б. И. Заславского [1, 2], позволяющий получить точные решения, которые являются обобщением некоторых известных автомодельных решений [3].

Рассмотрим классическое трансзвуковое течение идеального газа. Будем считать, что поток стационарный изэннергетический и изэнтропический. Основная система уравнений, характеризующих плоскопараллельные течения, имеет вид

$$u u_x = v_y, \quad v_x = u_y. \quad (1)$$

Известен несимметричный класс решений Заславского – Клепиковой для системы (1), s – параметр:

$$\begin{aligned}
 u &= u_0(s) + u_1(s)y + u_2(s)y^2, \\
 v &= v_0(s) + v_1(s)y + v_2(s)y^2 + v_3(s)y^3, \\
 x &= x_0(s) + x_1(s)y + sy^2.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Подставляя (2) в (1), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов в (2), с целью упрощения записи опускаем аргументы у функций:

$$\begin{aligned}
 x_0' &= \frac{u_0 - x_1^2}{u_2 - 4s^2}, & x_1' &= \frac{-(4x_1s - u_1)}{u_2 - 4s^2}, & u_0' &= \frac{-(u_1x_1 - v_1)}{u_2 - 4s^2}, \\
 u_1' &= \frac{-2(u_2x_1 - v_2 + u_1s)}{u_2 - 4s^2}, & u_2' &= \frac{3v_3 - 4s u_2}{u_2 - 4s^2}, & v_0' &= \frac{u_0u_1 - v_1x_1}{u_2 - 4s^2}, \\
 v_1' &= \frac{u_1^2 - 2v_2x_1 + 2u_0u_2 - 2v_1s}{u_2 - 4s^2}, & v_2' &= \frac{3(u_1u_2 - v_3x_1) - 4v_2s}{u_2 - 4s^2}, & v_3' &= \frac{-2(3v_3s - u_2^2)}{u_2 - 4s^2}.
 \end{aligned}$$

Из этой системы можно выделить нелинейное ядро (из пятого и девятого уравнений) для u_2', v_3' .

Применим технологию восстановления остальных коэффициентов. Известным считаем коэффициент $u_2(s)$. Действительно, нелинейное ядро можно свести к одному уравнению 2-го порядка относительно $u_2(s)$, частное решение которого $u_2(s) = s^2$. Восстановленное решение для (2) имеет вид ($z = t^3$)

$$\begin{aligned}
 x &= Bt^3y^2 + \left(\frac{1}{2}C_1t^2 + \frac{9}{28}\frac{C_3B^2}{t^4} + C_4Bt^3 \right)y + \frac{1}{4}C_4^2Bt^3 + \frac{1}{4}C_1C_4t^2 + \frac{1}{2}\frac{C_2}{t^2} - \\
 &\quad - \frac{27}{2156}\frac{B^3C_3^2}{t^{11}} + \frac{9}{56}\frac{C_4C_3B^2}{t^4} - \frac{3}{5}\frac{C_5B}{t^5} + C_6, \\
 u &= B^2t^6y^2 + \left(\frac{18}{7}\frac{B^3C_3}{t} + t^5BC_1 + C_4B^2t^6 \right)y + tC_2B - \frac{27}{784}\frac{B^4C_3^2}{t^8} + \\
 &\quad + \frac{9}{7}\frac{C_4C_3B^3}{t} + \frac{1}{2}t^5C_4C_1B + \frac{1}{4}C_4^2B^2t^6 - 3\frac{C_5B^2}{t^2} + \frac{9}{28}\frac{C_3B^2C_1}{t^2} + \frac{1}{4}t^4C_1^2, \\
 v &= -\frac{2}{3}y^3B^3t^9 + \left(-C_4B^3t^9 + \frac{117}{28}t^2B^4C_3 - t^8C_1B^2 \right)y^2 + \left(-\frac{1}{2}t^9B^3C_4^2 - \right. \\
 &\quad \left. - t^4B^2C_2 - 6tC_5B^3 - \frac{1}{2}t^7BC_1^2 + \frac{9}{4}tB^3C_1C_3 - t^8B^2C_4C_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{27}{49}\frac{B^5C_3^2}{t^5} + \frac{117}{28}t^2B^4C_4C_3 \right)y + \left\{ \frac{1}{12}C_4^3B^3t^9 - \frac{243}{10976}\frac{C_3^3B^6}{t^{12}} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}BC_1C_2t^3 - \frac{1}{4}BC_1^2C_4t^7 + \frac{27}{28}\frac{C_3B^3C_2}{t^3} - \frac{27}{784}\frac{C_1B^4C_3^2}{t^6} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{27 C_3^2 B^5 C_4}{28 t^5} + \frac{117}{112} C_3 B^4 C_4^2 t^2 - \frac{1}{4} C_1 C_4^2 B^2 t^8 - \frac{1}{12} t^6 C_1^3 + C_7 - \left. \frac{27 C_5 B^4 C_3}{28 t^6} - 3 B^3 C_5 C_4 t - \frac{1}{2} C_2 C_4 B^2 t^4 + \frac{9}{8} C_3 B^3 C_1 C_4 t \right\}.$$

Здесь $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, B$ – константы.

Заметим, что в представлении (2) мы брали старшие коэффициенты как функции параметра s и тем самым полученный результат не включает так называемые *потерянные решения*, когда старшие коэффициенты в (2) константы.

$$x = \left(\frac{5z^9 + 18z^6 B - 15z^3 C_1 + 15B^2 z^3 + 30C_1 + 60C_3 Dz}{60Dz} \right) + (Bz + z^4)y + Dy^2,$$

$$u = \left(\frac{C_1}{z} + z^2 C_1 - \frac{1}{3} z^5 (3B + z^3) \right) + (2DBz - 4Dz^4)y + 4D^2 y^2,$$

$$v = \left(\frac{1}{3} Bz^9 + B^2 z^6 + \frac{1}{3} (-3BC_1 + 3C_1 + B^3) z^3 + C_2 \right) + \frac{2D(3C_1 - 6z^3 C_1 + 12z^6 B + 2z^9 + 3B^2 z^3)y}{3z} + (4D^2 Bz + 16D^2 z^4)y^2 + \frac{16}{3} D^3 y^3.$$

Здесь C_1, C_2, C_3, D, B – произвольные постоянные.

Наряду с решением Заславского (2) существует класс однопараметрических решений, ассоциированный с $n = 3$.

Аналогично несимметричному решению (2) можно воспользоваться технологией восстановления коэффициентов и получить следующее точное решение ($s = z^4$) для $u_4(s) = s^2$:

$$x = -\frac{4 C_2 B}{5 t^5} + \frac{1 C_1}{2 t} + C_3 + B t^4 y^3, \quad u = B^2 t^8 y^4 + \left(t^3 C_1 B - 8 \frac{C_2 B^2}{t} \right) y,$$

$$v = -\frac{2}{3} y^6 B^3 t^{12} + \left(-\frac{40}{3} t^3 C_2 B^3 - t^7 C_1 B^2 \right) y^3 + \frac{16 C_2^2 B^3}{3 t^6} - 4 \frac{C_1 C_2 B^2}{t^2} - \frac{1}{4} t^2 B C_1^2 + C_3. \quad (3)$$

Здесь C_1, C_2, C_3, B – константы.

Решения вида (2) как обобщение симметричного решения Заславского – Клепиковой описывают трансзвуковые течения для показателей автомодельности $n = 2, n = 4/5, n = 5/4$ при $\omega = 0$. А решения вида (3) – для $n = 3, n = 5/3, n = 6/5, n = 3/5$. Необходимо рассмотреть автомодельные решения для соответствующих показателей автомодельности, найти для них параметрическое представление и убедиться в его соответствии с решениями вида (2). Таким образом, на базе основных автомодельных решений параметрическим методом могут быть получены точные решения, являющиеся их обобщением.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Заславский Б. И. О нелинейном взаимодействии сферической ударной волны, возникшей в результате взрыва заглубленного заряда со свободной поверхностью воды // ПМТФ. 1964. Вып. 4. С. 57 – 65.
2. Севостьянов Г. Д. Структура элементарных околосвуковых решений // Аэродинамика. Нелинейные проблемы: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та. 1997. Вып. 14(17). С. 109 – 117.
3. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа // ПММ. 1964. Т. 28. С. 280 – 284.

УДК 517.958:536.2

В. Ю. Ольшанский, В. Ю. Михайлов, А. В. Серебряков

РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦ РАЗДЕЛА КОМПОНЕНТ В ОДНОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА ПРИ ТЕРМИЧЕСКОМ РАСЩЕПЛЕНИИ ГРАФИТА

Рассмотрим термическое расщепление предварительно окисленного графита (ОГ) в случае, когда два размера технологической формы много больше третьего. Расчеты проводятся на основе одномерной модели для бесконечного слоя, помещенного между двумя пластинами, через которые осуществляется нагрев. В первоначальной засыпке технологической формы $h_0/L < 1$, где h_0 – толщина слоя графита и L – расстояние между пластинами, принятое за характерную длину при переходе к безразмерным величинам.

В рамках предложенной модели процесс термического расщепления разделяется на три стадии. Первая стадия описывает нагрев слоя ОГ за счет конвективного теплообмена через нижнее основание. Между слоем графита и верхней пластиной имеется воздушная прослойка. Интенсивность теплообмена с этой прослойкой считается пренебрежимо малой. Распределение температуры в слое ОГ определяется из решения задачи нестационарной теплопроводности:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = Fo^{(1)} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \quad 0 < x < h_0/L, \quad 0 < t < t_1, \quad (1)$$

$$u_1(x, 0) = u_0, \quad 0 < x < h_0/L, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=0} - Bi^{(1)} \cdot u_1(0, t) + Bi^{(1)} \cdot u_* = 0, \quad \left. \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|_{x=h_0/L} = 0. \quad (3)$$

Здесь Fo , Bi – соответственно числа Фурье и Био. Первая стадия завершается в момент $t = t_1$, для которого $u(0, t_1) = u_*$. Здесь u_* – температура, при которой возникает фаза терморасщепленного графита (ТРГ).