УДК 301.15.15.07.02

Я. Г. Сапунков

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА В НЕЦЕНТРАЛЬНОМ ПОЛЕ ГРАВИТАЦИИ ЗЕМЛИ*

В статье с помощью принципа максимума Понтрягина решена задача оптимального управления о встрече двух космических аппаратов (КА), один из которых управляемый, а второй – неуправляемый и движется под действием силы притяжения к Земле. Задача решена с использованием кватернионных элементов орбиты при условии, что поле гравитации Земли не является центральным. Функционал качества процесса управления представляет свертку с весовыми множителями двух критериев, определяющих время и энергию, затраченные в процессе управления.

1. Движение управляемого КА в нецентральном поле гравитации Земли в декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$, начало которой находится в центре Земли, а плоскость Ox_1x_2 совпадает с экваториальной плоскостью, в безразмерных кватернионных элементах орбиты $\mathbf{A}=(A_0,A_1,A_2,A_3)$, $\mathbf{B}=(B_0,B_1,B_2,B_3)$ описывается системой уравнений:

$$\frac{d\mathbf{A}}{d\varphi}=(-\varepsilon\mathbf{F_1}+\delta\mathbf{F_2}(\mathbf{u}^2)^{-5})Q\sin\varphi\,,\quad \frac{d\mathbf{B}}{d\varphi}=(\varepsilon\mathbf{F_1}-\delta\mathbf{F_2}(\mathbf{u}^2)^{-5})Q\cos\varphi\,, \qquad (1)$$

$$\frac{dt}{d\varphi}=\mathbf{u}^2(2Q)^{1/2},\ \mathbf{u}=\mathbf{A}\cos\varphi+\mathbf{B}\sin\varphi,\ \mathbf{w}=-\mathbf{A}\sin\varphi+\mathbf{B}\cos\varphi,\ Q=A^2+B^2,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{p})=\mathbf{u}^2P(\mathbf{u})\,\mathbf{p}+\mathbf{w}(\mathbf{w},P(\mathbf{u})\,\mathbf{p}),\ \mathbf{F}_1=\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{p}),\ \mathbf{F}_2=\mathbf{F}(\mathbf{u},\mathbf{w},\mathbf{q}(\mathbf{u})),$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{u})=\left[1-5(\mathbf{u},P(\mathbf{u})\mathbf{j}_3)^2(\mathbf{u}^2)^{-2}\right]P^T(\mathbf{u})\,\mathbf{u}+2(\mathbf{u},P(\mathbf{u})\mathbf{j}_3)\mathbf{j}_3\,.$$

$$P(\mathbf{u})=\begin{Vmatrix} u_0 & -u_3 & u_2\\ u_1 & u_2 & u_3\\ -u_2 & u_1 & u_0\\ -u_3 & -u_0 & u_1\end{Vmatrix},\quad \mathbf{r}=P^T(\mathbf{u})\,\mathbf{u},\ \mathbf{v}=\frac{2}{r(2Q)^{1/2}}P^T(\mathbf{u})\mathbf{w},\ \ |\mathbf{p}|\le 1.\ (2)$$

Здесь $\mathbf{p}$ – безразмерный управляющий параметр, $\mathbf{j}_3$ – единичный орт оси Ox_3, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ – безразмерные радиус вектор и вектор скорости центра масс КА, φ – независимая переменная, t – безразмерное время.

При переходе к безразмерным переменным масштабом длины выбран экваториальный радиус Земли $R_з$, масштабом времени $\left(R_з^3(\gamma M_з)^{-1}\right)^{1/2}$, где $M_з$ – масса Земли, γ – гравитационная постоянная. Для величин

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-01-00347).

A, **B**, **u**, **w** масштабным множителем является $R_3^{1/2}$, для величины **p** – максимальная величина тяги $p^*_{\max}$, отнесенная к единице массы КА. Малые параметры $\varepsilon = p^*_{\max} R_3^2 (\gamma M_3)^{-1}$, $\delta = 1.5\left(I_{x_3x_3} - I_{x_1x_1}\right)\left(M_3 R_3^2\right)^{-1}$, где $I_{x_1x_1}$, $I_{x_3x_3}$ – осевые моменты инерции Земли. Параметр ε характеризует отношение максимальной тяги к силе тяжести на экваторе Земли. Параметр δ = 0.001647 характеризует отклонение гравитационного поля Земли от центрального поля.

Движение неуправляемого КА в безразмерных переменных описывается системой уравнений с независимой переменной φ_a:

$$\frac{d\mathbf{A}_a}{d\varphi_a} = \delta \mathbf{F}_{2a}\left(\mathbf{u}_a^2\right)^{-5} Q_a \sin\varphi_a, \quad \frac{d\mathbf{B}_a}{d\varphi_a} = -\delta \mathbf{F}_{2a}\left(\mathbf{u}_a^2\right)^{-5} Q_a \cos\varphi_a,$$

$$\mathbf{F}_{2a} = \mathbf{F}\left(\mathbf{u}_a, \mathbf{w}_a, \mathbf{q}(\mathbf{u}_a)\right),$$

$$\frac{dt}{d\varphi_a} = \mathbf{u}_a^2 (2Q_a)^{1/2}, \mathbf{u}_a = \mathbf{A}_a \cos\varphi_a + \mathbf{B}_a \sin\varphi_a, \mathbf{w}_a = -\mathbf{A}_a \sin\varphi_a + \mathbf{B}_a \cos\varphi_a,$$

$$Q_a = A_a^2 + B_a^2. \tag{3}$$

Начальное состояние управляемого КА задано соотношениями:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi = 0, \ \mathbf{A} = \mathbf{A}_0, \ \mathbf{B} = \mathbf{B}_0, \tag{4}$$

а неуправляемого КА – соотношениями:

$$\text{при } t = 0 \quad \varphi_a = 0, \ \mathbf{A}_a = \mathbf{A}_{a0}, \ \mathbf{B}_a = \mathbf{B}_{a0}. \tag{5}$$

Связь между переменными φ_a и φ определяется уравнением

$$\frac{d\varphi_a}{d\varphi} = \frac{\mathbf{u}^2 Q^{1/2}}{\mathbf{u}_a^2 Q_a^{1/2}} \tag{6}$$

и начальными условиями (4) и (5).

Условие мягкой встречи аппаратов определяется соотношениями:

$$P^T\left(\mathbf{u}(\varphi_k)\right)\mathbf{u}(\varphi_k) = P^T\left(\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k))\right)\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k)), \tag{7}$$

$$\frac{1}{Q^{1/2}(\varphi_k)} P^T\left(\mathbf{u}(\varphi_k)\right)\mathbf{w}(\varphi_k) = \frac{1}{Q_a^{1/2}(\varphi_a(\varphi_k))} P^T\left(\mathbf{u}_a(\varphi_a(\varphi_k))\right)\mathbf{w}_a(\varphi_a(\varphi_k)), \tag{8}$$

а условие жесткой встречи – лишь соотношением (7).

Для оптимального процесса управления функционал качества

$$I = \int_0^{t_k}\left(\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2\right)dt = \int_0^{\varphi_k}\left(\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2\right)\mathbf{u}^2 (2Q)^{1/2} d\varphi \tag{9}$$

принимает минимальное значение. С помощью изменения весовых множителей α_1 и α_2 можно усиливать влияние одного из критериев, входящих в функционал.

2. Для решения поставленной задачи с помощью принципа максимума Понтрягина составляется функция Гамильтона – Понтрягина:

$$H = -\varepsilon\left(\alpha_1 + \alpha_2 \varepsilon^2 p^2\right)\mathbf{u}^2 Q^{\frac{1}{2}} + Q\left(\varepsilon \mathbf{F}_1 - \delta \mathbf{F}_2 \left(\mathbf{u}^2\right)^{-5}, \mathbf{\Pi}\right) + \varepsilon \vartheta \frac{\mathbf{u}^2 Q^{\frac{1}{2}}}{\mathbf{u}_a^2 Q_a^{\frac{1}{2}}},$$

$$\mathbf{\Pi} = -\psi_a \sin\varphi + \psi_b \cos\varphi. \qquad (10)$$

Уравнения для сопряженных переменных $\psi_a, \psi_b, \varepsilon\vartheta$ имеют вид

$$\frac{d\psi_a}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{A}}, \quad \frac{d\psi_b}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{B}}, \quad \varepsilon \frac{d\vartheta}{d\varphi} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi_a}. \qquad (11)$$

Оптимальное управление $\mathbf{p}_{opt}$, удовлетворяющее ограничению (2), согласно условию максимума для функции Гамильтона – Понтрягина можно представить в виде

$$\tilde{\mathbf{p}} = \frac{1}{2\alpha_2 \varepsilon^2 \mathbf{u}^2} Q^{\frac{1}{2}} P^T(\mathbf{u})\left(\mathbf{u}^2 \mathbf{\Pi} + \mathbf{w}(\mathbf{w}, \mathbf{\Pi})\right),$$

$$\mathbf{p}_{opt} = \left\{\ \tilde{\mathbf{p}}, \text{если } |\tilde{\mathbf{p}}| \le 1, \text{иначе } \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{|\tilde{\mathbf{p}}|}\ \right\}. \qquad (12)$$

В поставленной задаче оптимального управления правый конец траектории находится на подвижном многообразии, которое определяется условиями (7) и (8) или (7) в зависимости от варианта встречи. Следовательно, на правом конце траектории должны выполняться соответствующие условия трансверсальности, которые в случае мягкой встречи имеют вид

$$l(\psi_a, \mathbf{A}) + l(\psi_b, \mathbf{B}) = 0, \ \ l(\mathbf{\Pi}, \mathbf{u}) = 0, \ \ H + (\psi_a, \mathbf{B}) - (\psi_b, \mathbf{A}) = 0,$$

$$\varepsilon\vartheta + (\psi_a, \mathbf{B}) - (\psi_b, \mathbf{A}) - \delta Q_a \left(\mathbf{u}_a^2\right)^{-6}\left(P(\mathbf{u_a}) P^T(\mathbf{u})\mathbf{\Pi}, \mathbf{F}_{2a}\right) = 0, \qquad (13)$$

а в случае жесткой встречи:

$$l(\psi_a, \mathbf{A}) + l(\psi_b, \mathbf{B}) = 0, \ \ \mathbf{\Pi} = 0, \ \ \varepsilon \mathbf{u}^2 \vartheta + \left(P^T(\mathbf{u})\,\mathbf{\Phi}, P^T(\mathbf{u}_a)\,\mathbf{w}_a\right) = 0,$$

$$H + \left(P^T(\mathbf{u})\,\mathbf{\Phi}, P^T(\mathbf{u})\,\mathbf{w}\right) = 0, \quad \text{где } \mathbf{\Phi} = \psi_a \cos\varphi_k + \psi_b \sin\varphi_k. \qquad (14)$$

Таким образом, решение задачи оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы уравнений (1), (3), (6), (11), (12) с граничными условиями (4), (5) при φ=0 и условиями (7), (8), (13) для мягкой встречи или (7), (14) для жесткой встречи в конце движения.

3. На рис. 1 представлена в нецентральном поле Земли траектория оптимального движения управляемого КА, которая начинается в точке В, и траектория движения неуправляемого КА, начинающаяся в точке А. На рис. 2 изображена зависимость оптимального управления от времени.

Ниже приводятся результаты расчетов в безразмерных переменных для $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 40$, $\varepsilon = 0.175$.

В таблице представлены координаты радиуса вектора положения и вектора скорости управляемого КА в начальный момент времени (первая строка), неуправляемого КА в начальный момент времени (вторая строка), те же величины в момент мягкой встречи в центральном поле Земли [1] (третья строка) и в нецентральном поле (четвертая строка).

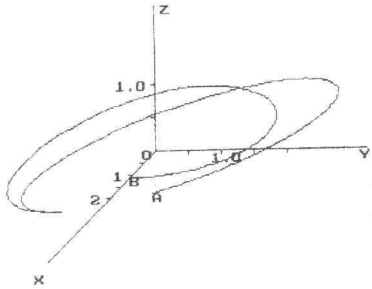

Рис. 1. Траектории полета КА

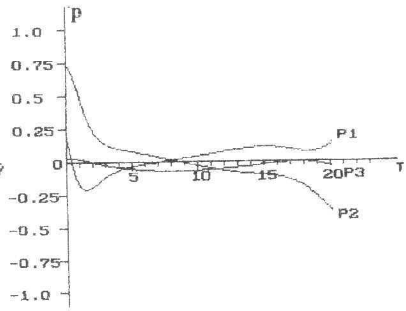

Рис. 2. Управления p_1, p_2, p_3

T	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3
0.0	1.1025	0.0	0.0	0.0	0.9524	0.0
0.0	2.3100	0.7500	0.1750	-0.1006	0.6037	0.1409
20.6105	2.1811	-0.4534	-0.1058	0.2472	0.6226	0.1453
20.6237	2.1865	-0.4378	-0.1012	0.2424	0.6238	0.1457

Для перехода к размерным переменным необходимо использовать масштабы длины $R_з$= 6378.245 км, времени T = 806.83 с = 0.2241 ч, скорости V = 7.9053 км/с.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сапунков Я. Г.* Оптимальные траектории и управления в задаче о встрече космических аппаратов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 171 – 174.

УДК 531

Г. Д. Севостьянов

О ЛИНЕЙНОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Задача Дарбу (G. Darboux) [1, 2] – аналитически определить движение тела с неподвижной точкой по заданной его мгновенной угловой скорости $\overline{\omega}(t)$. Для этого необходимо аналитически проинтегрировать нели-