В таблице представлены координаты радиуса вектора положения и вектора скорости управляемого КА в начальный момент времени (первая строка), неуправляемого КА в начальный момент времени (вторая строка), те же величины в момент мягкой встречи в центральном поле Земли [1] (третья строка) и в нецентральном поле (четвертая строка).

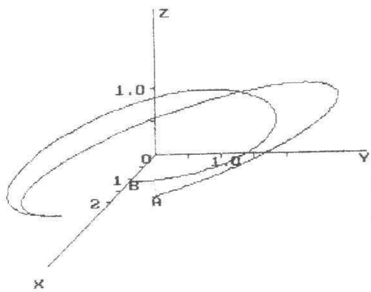


Рис. 1. Траектории полета КА

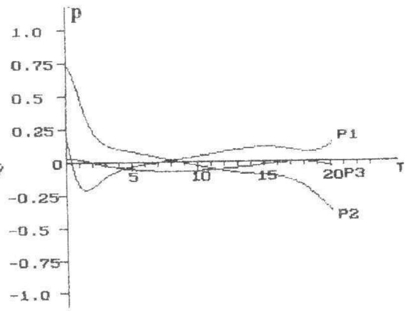


Рис. 2. Управления $p_1$, $p_2$, $p_3$

| $T$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.1025 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.9524 | 0.0 |
| 0.0 | 2.3100 | 0.7500 | 0.1750 | -0.1006 | 0.6037 | 0.1409 |
| 20.6105 | 2.1811 | -0.4534 | -0.1058 | 0.2472 | 0.6226 | 0.1453 |
| 20.6237 | 2.1865 | -0.4378 | -0.1012 | 0.2424 | 0.6238 | 0.1457 |

Для перехода к размерным переменным необходимо использовать масштабы длины $R_з$= 6378.245 км, времени $T$ = 806.83 с = 0.2241 ч, скорости $V$ = 7.9053 км/с.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сапунков Я. Г.* Оптимальные траектории и управления в задаче о встрече космических аппаратов // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. Вып. 5. С. 171 – 174.

УДК 531

**Г. Д. Севостьянов**

# О ЛИНЕЙНОСТИ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДАРБУ ДЛЯ ТЕЛА С НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Задача Дарбу (G. Darboux) [1, 2] – аналитически определить движение тела с неподвижной точкой по заданной его мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}(t)$. Для этого необходимо аналитически проинтегрировать нелинейную систему 3-го порядка (кинематические уравнения Эйлера, разрешенные относительно производных по времени $t$) [2]:

$$\dot{\psi} = (p\sin\varphi + q\cos\varphi)/\sin\theta,$$
$$\dot{\theta} = p\cos\varphi - q\sin\varphi,$$
$$\dot{\varphi} = r - (p\sin\varphi + q\cos\varphi)\mathrm{ctg}\theta, \qquad (1)$$

где $\varphi, \psi, \theta$ – углы Эйлера (углы собственного вращения, прецессии, нутации тела соответственно); $p(t), q(t), r(t)$ – заданные координаты $\bar{\omega}$ в связанной с телом системе координат $xyz$.

Ж.Г. Дарбу (1848 – 1917) привел систему (1) к комплексному уравнению Риккати (первого порядка) (или двум линейным уравнениям 2-го порядка для вещественных функций) [1, 2]. С помощью четырех параметров Родрига – Гамильтона из (1) получена линейная система четырех уравнений первого порядка [2].

Введение четырех параметров Кейли – Клейна (комплексных комбинаций параметров Родрига – Гамильтона) приводит к 4 уравнениям 1-го порядка. Уравнения Пуассона – линейная система 3 цикличных уравнений для трех зависимых координат $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ орта неподвижной оси в связанной системе $xyz$, определяющихся углами $\varphi, \theta$ [2].

В данной статье из (1) получено одно *линейное однородное* уравнение *3-го порядка* для $\cos\theta$ (содержащее одну заданную временную функцию), нелинейное *уравнение 2-го порядка* для $\cos\theta$.

В связанной с телом плоскости $xy$ введем вектор $\bar{\Omega}(p, q)$ и $\chi$ – угол между $\bar{\Omega}$ и осью $x$ ($p = \Omega\cos\chi$, $q = \Omega\sin\chi$). Обозначим знаком «$'$» производную по интегральному безразмерному времени $\tau$:

$$\tau = \int_0^t \Omega(t)dt. \qquad (2)$$

Тогда система (1) примет вид

$$\psi'\sin\theta = \sin(\varphi + \chi),$$
$$\theta' = \cos(\varphi + \chi),$$
$$\psi'\cos\theta = \frac{r}{\Omega} - \varphi'. \qquad (3)$$

Перемножим 1-е, 2-е уравнения и $\cos\theta$; тогда, учитывая 3-е уравнение, получим:

$$\left(\frac{r}{\Omega} - \varphi'\right)\sin\theta\cos(\varphi + \chi) = \sin(\varphi + \chi)\cos\theta \cdot \theta'.$$

Прибавив к обеим частям $(\varphi' + \chi')\sin\theta\cos(\varphi + \chi)$ и используя 2-е уравнение, имеем:

$$[\sin\theta\sin(\varphi + \chi)]' = \sigma(\tau)\sin\theta \cdot \theta',$$

где введена известная функция $\sigma$, зависящая от $p, q, r$ (линейно зависящая от $r$):

$$\sigma(\tau)=\frac{r}{\Omega}+\chi', \ \ \chi'=\frac{q'p-p'q}{\Omega^2}, \ \ \Omega^2=p^2+q^2. \tag{4}$$

Учитывая равенство

$$\sin^2\theta\sin^2(\varphi+\chi)=1-\cos^2\theta-[(\cos\theta)']^2$$

и вводя вместо $\theta$ функцию $s=\cos\theta$, получим для нее нелинейное уравнение 2-го порядка:

$$\left(\sqrt{1-s^2-s'^2}\right)'=-\sigma s', \quad |s|\le 1, \tag{5}$$

или после дифференцирования и возведения в квадрат другое уравнение

$$s^2+s'^2+\left(\frac{s''+s}{\sigma}\right)^2=1. \tag{6}$$

Дифференцируя его по $\tau$, придем к *линейному однородному* уравнению *3-го порядка* для функции $s=\cos\theta$:

$$s'''-\frac{\sigma'}{\sigma}s''+(1+\sigma^2)s'-\frac{\sigma'}{\sigma}s=0, \tag{7}$$

которое можно записать в компактной форме:

$$\left(\frac{s''+s}{\sigma}\right)'=-\sigma s'. \tag{8}$$

Уравнение (8) приводится к линейной системе $\boldsymbol{s}'=\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{s}$, где $\boldsymbol{s}(s_1,s_2,s_3)$, $s_1=s$, $s_2=s'$, $s_3=\dfrac{s''+s}{\sigma}$, с кососимметричной вырожденной матрицей $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & \sigma\\ 0 & -\sigma & 0\end{pmatrix}$.

С помощью замены $s'=us$ из (7) получим уравнение 2-го порядка (разрешенное относительно старшей производной без радикалов):

$$u''+P_1(u)\,u'+P_3(u)=0, \tag{9}$$

где $P_1(u)=3u-\dfrac{\sigma'}{\sigma}$, $P_3(u)=u^3-\dfrac{\sigma'}{\sigma}u^2+(1+\sigma^2)u-\dfrac{\sigma'}{\sigma}$, $u=-\mathrm{tg}\theta\cdot\theta'$.

Уравнение (9) приводится к уравнению Риккати [3]:

$$u'=-u^2+gu+h, \tag{10}$$

если его коэффициенты $g(\tau)$ и $h(\tau)$ удовлетворяют системе:

$$h'+\left(g-\frac{\sigma'}{\sigma}\right)h-\frac{\sigma'}{\sigma}=0,$$

$$g'+g^2-\frac{\sigma'}{\sigma}g+h+1+\sigma^2=0. \tag{11}$$

Уравнение (7) приводит к линейному однородному уравнению 2-го порядка для $s$ и уравнению (10) ($g = \sigma'/\sigma,\ h = -1 - \sigma^2 - (\sigma'/\sigma)'$), если $\sigma(\tau)$ удовлетворяет уравнению (интегрируемому с помощью замены $w = \ln|\sigma|$)

$$(\sigma'/\sigma)'' + 2\sigma\sigma' + \sigma'/\sigma = 0.$$

При постоянной $\sigma = \sigma_c$ из (7) имеем

$$\cos\theta = s = s_* + a\sin(k\tau + \alpha),\ k^2 = 1 + \sigma_c^2,\ \alpha^2 = k^{-2} - s_*^2/(k^2 - 1),$$

тогда из (4) $r(\tau)$ выражается через $p(\tau), q(\tau)$; в случае $a = 0$ – регулярная прецессия ($\theta = \theta_0$).

Если из (7) найти для заданной $\sigma(\tau)$ решение $s(\tau)$, то получим $\theta(\tau)$; из 2-го уравнения (3) – $\varphi(\tau)$, а из 3-го уравнения интегрированием по $\tau$ – $\psi(\tau)$. С помощью (2) найдем углы $\theta, \varphi, \psi$ как функции времени $t$, т. е. движение тела относительно неподвижного пространства.

Кинематические уравнения Эйлера для корабельных, самолетных и других углов Эйлера можно привести к виду (1).

Если заданы $p, q, \theta$, то с учетом (2) из (6) можно найти $\sigma$, а из (4) – $r$; тогда из динамических уравнений Эйлера находится момент внешних сил относительно неподвижной точки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Darboux G.* Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris: Bibl. Gauthier-Villars, 1887. T. 1, chap. II.

2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

УДК 531+629

**Ю. Н. Челноков**

## ТЕОРЕМА ГАМИЛЬТОНА – ИШЛИНСКОГО О ТЕЛЕСНОМ УГЛЕ И ЕЕ ОБОБЩЕНИЕ НА НЕГОЛОНОМНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА*

Одной из замечательных теорем кинематики твердого тела, имеющей важные приложения в инерциальной навигации и гироскопической технике, является теорема о телесном угле. В геометрической постановке эта теорема впервые была сформулирована У. Р. Гамильтоном изначально как теорема о сложении любого числа конечных конических поворотов, а затем как теорема о сложении бесконечного числа конических инфинитези-

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 05-01-00347).