$$\chi^0 = -\iint \varphi^0 \sin\varphi \, d\psi \, d\varphi + \cos\varphi \, (d\psi \, d\varphi^0 + d\varphi \, d\psi^0) = \Omega^0. \quad (8)$$

Таким образом, нахождение поступательного перемещения твердого тела вдоль связанной оси $z$ в результате ее движения по линейчатой замкнутой поверхности сводится к вычислению криволинейного интеграла второго рода (7) или поверхностного интеграла (8). Отметим, что формула (8) может быть также получена из формулы (7) с помощью формул Стокса и Грина.

Среди важных приложений теоремы о дуальном телесном угле и полученных формул отметим задачи пространственной инерциальной навигации, а также задачи механики пространственных механизмов и роботов-манипуляторов, в особенности механизмов с винтовыми кинематическими парами, в которых непосредственно реализуются повороты на дуальные углы. В этих задачах полученные формулы могут быть использованы для оценки поступательных перемещений движущихся объектов и выходных звеньев механизмов и манипуляторов в случаях, когда они совершают описанные неголономные пространственные движения.

Другим важным примером являются задачи навигации и управления движением, в которых информация о кажущемся ускорении и кажущейся скорости движущегося объекта используется как для целей навигации, так и управления движением.

УДК 593.3

**В. П. Черненко, Н. С. Анофрикова**

# УРАВНЕНИЕ ПОГРАНСЛОЯ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ В ОКРЕСТНОСТИ ФРОНТА ВОЛНЫ С ДЛИТЕЛЬНОЙ СКОРОСТЬЮ

Рассмотрим тонкий вязкоупругий полубесконечный стержень цилиндрической формы. Пусть стержень подвергается ударному торцевому воздействию. Краевая задача, описывающая данный тип воздействия, имеет вид [1]

$$\frac{\partial\sigma(x,t)}{\partial x} - \rho\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0,$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{E}\left[\sigma(x,t) + \int_0^t K(t-t_*)\sigma(x,t_*)\,dt_*\right], \quad (1)$$

с граничным условием

$$\sigma(0,t) = IH(t) \quad (2)$$

и начальными условиями

$$\sigma(x,0)=0, \quad \frac{\partial\sigma(x,0)}{\partial t}=0, \tag{3}$$

где $u$ – перемещение, $\sigma$ – напряжение, $x$ – продольная координата, $t$ – время, $\rho$ – плотность материала, $I$ – амплитуда воздействия, $E$ – мгновенный модуль упругости, $H(t)$ – единичная функция Хевисайда, $K(t-t_*)$ – разностное ядро ползучести Работнова, которое имеет вид [2]

$$K(t)=kt^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n t^{n/2}}{\Gamma[(n+1)/2]}, \tag{4}$$

где $\beta>0$, $k>0$ – параметры материала, $\Gamma[\,\cdot\,]$ – гамма-функция.

Подставляя второе уравнение системы (1) в первое уравнение той же системы, получим следующее разрешающее уравнение относительно напряжения:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}-\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\sigma}{\partial t^2}-\frac{\rho}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_0^t K(t-t_*)\sigma(x,t_*)dt_*=0. \tag{5}$$

В уравнении (5) перейдем к безразмерным переменным и безразмерному напряжению по формулам

$$x=cT_k\xi, \quad t=T_k\tau, \qquad \sigma=E\sigma^*, \tag{6}$$

где $c=\sqrt{E/\rho}$ – мгновенная скорость, $T_k=1/k^2$ – масштабный множитель, имеющий размерность времени. Получим разрешающее уравнение в следующем виде

$$\frac{\partial^2\sigma^*}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2\sigma^*}{\partial\tau^2}-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_0^t K_*(\tau-\tau_*)\sigma(\xi,\tau_*)d\tau_*=0, \tag{7}$$

$$K_*(\tau)=\tau^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta_*)^n\tau^{n/2}}{\Gamma[(n+1)/2]}, \quad \beta_*=T_k^{1/2}\beta.$$

В дальнейшем для простоты опустим звездочки у безразмерных величин.

Переходя в уравнении (7) к изображениям по Лапласу по переменной $\tau$, представляя изображение разностного ядра $\overline{K}$ в виде ряда

$$\overline{K}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\beta^n}s^{n/2}, \tag{8}$$

после возвращения к функциям-оригиналам получим

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi^2}-\frac{1}{k_c^2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau^2}-\frac{1}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\beta^n}D^{n/2}\sigma\right]=0, \tag{9}$$

где $k_c^2=\beta/(\beta+1)$, $D^{n/2}$ – оператор дробного дифференцирования [3].

Рассмотрим данную задачу при больших значениях времени, т.е. когда $\tau>>1$. Вводим масштабированные переменные в соответствии с характерным масштабным временем T>>1, т.е.

$$\tau = T\tau_T, \qquad \xi = T\xi_T, \tag{10}$$

где $\tau_T$ и $\xi_T$ – величины порядка единицы. Тогда разрешающее уравнение (9) относительно напряжения примет вид

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi_T^2} - \frac{1}{k_c^2}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau_T^2} - \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial\tau_T^2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\beta^n}\frac{1}{T^{n/2}}D_T^{n/2}\sigma\right] = 0, \tag{11}$$

где $D_T$ – оператор производной по переменной $\tau_T$.

Для получения уравнения погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью введём в рассмотрение характеристические переменные

$$y = T^{1/3}(\tau_T - \xi_T/k_c), \qquad \tau_1 = \tau_T. \tag{12}$$

Тогда уравнение (11) в характеристических переменных примет вид

$$2\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial\tau_1} + \frac{1}{T^{1/3}}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau_1{}^2} + \frac{k_c^2}{\beta}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{2}{T^{1/3}}\frac{\partial^2}{\partial y\partial\tau_1} + \frac{1}{T^{2/3}}\frac{\partial^2}{\partial\tau_1{}^2}\right)\times$$

$$\times\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\beta^n}\frac{1}{T^{(n-1)/3}}\left(\frac{D_T}{T^{1/3}}\right)^{n/2}\sigma\right] = 0. \tag{13}$$

Оставляя в уравнении (13) члены порядка $O(1/T^{1/3})$, преобразуя асимптотически второстепенные члены с учётом соотношения между асимптотически главными, интегрируя полученные уравнения по $y$ и возвращаясь к масштабированным переменным (10), получим следующее соотношение:

$$k_c\frac{\partial\sigma}{\partial\xi_T} + \frac{\partial\sigma}{\partial\tau_T} - \frac{1}{2\beta(\beta+1)}\left(\frac{k_c}{2}\frac{\partial}{\partial\xi_T} + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial\tau_T}\right)\frac{1}{T^{1/2}}D_T^{1/2}\sigma + \frac{1}{2\beta^2(\beta+1)}\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial\tau_T}D_T\sigma = 0. \tag{14}$$

Возвращаясь в соотношении (14) к исходным переменным и записывая его без дробных производных, получим уравнение погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью:

$$k_c\frac{\partial\sigma}{\partial\xi} + \frac{\partial\sigma}{\partial\tau} + \frac{1}{2\beta^2(\beta+1)}\frac{\partial^2\sigma}{\partial\tau^2} - \frac{k_c}{4\beta(\beta+1)\sqrt{\pi}}\frac{\partial}{\partial\tau}\int_0^\tau\frac{1}{(\tau-\tau_*)^{1/2}}\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}d\tau_* -$$

$$-\frac{3}{4\beta(\beta+1)\sqrt{\pi}}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\int_0^\tau\frac{\sigma\, d\tau_*}{(\tau-\tau_*)^{1/2}} = 0. \tag{15}$$

Порядок уравнения (15) на единицу меньше порядка точного уравнения (7). Кроме того, вместо ядра Работнова (уравнение (7)) мы имеем более простое ядро Абеля (уравнение (15)).

Решая уравнение (15) с помощью интегрального преобразования Лапласа по переменной $\tau$, получаем следующее выражение для напряжения:

$$\sigma = \frac{I}{E}\left[1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{p}\exp\left[-\left(\left(\tau - \frac{\xi}{k_c}\right)p + B\xi p^2\right)\right]\sin\left(A\xi p^{3/2}\right)dp\right], \tag{16}$$

$$A = \frac{1}{2\beta(\beta+1)k_c}, \qquad B = \frac{4\beta+3}{8\beta^2(\beta+1)^2 k_c}.$$

Полученное решение (16) уравнения погранслоя в окрестности фронта волны с длительной скоростью (15) совпадает с асимптотикой решения точного уравнения, полученной в [1].


БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Коссович Л. Ю., Сухоловская М. С.* Решение задачи о нестационарных продольных волнах в тонком вязкоупругом стержне // Механика деформируемых сред: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 14. С. 93 – 98.

2. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1974. 338 с.

3. *Rossikhin Yu. A., Shitikova M. V.* Applications of fractional calculus to dynamic problems // Appl. Mech. Rev. 1997. Vol. 50, № 1. C. 16 – 18.



УДК 533.6.011



**С. П. Шевырёв**


# РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА ДАВЫДОВА НА ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТКЕ

В статье метод Давыдова численного решения сложных задач механики сплошных сред [1, 2] обобщается на случай произвольной сетки.

<u>Плоский случай</u>

Рассматриваются краевые задачи для системы уравнений Эйлера нестационарного невязкого газа [1, 2]. При численном решении методом Давыдова схема расчёта разбивается на три этапа, но сетка теперь треугольная, что позволяет адаптироваться к произвольному обтекаемому телу и реализовать на теле граничное условие непротекания.

Выпишем разностные схемы метода Давыдова для случая треугольных крупных частиц. Все вычисляемые газодинамические параметры (плотность, скорость, полная энергия, давление) относятся к геометрическим центрам треугольников.

Укороченные дифференциальные уравнения *эйлерова этапа*

$$\begin{cases} \rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \rho\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \rho\dfrac{\partial E}{\partial t} + \dfrac{\partial pu}{\partial x} + \dfrac{\partial pv}{\partial y} = 0 \end{cases}$$