УДК 519.4

С. А. Акимова

КОНКРЕТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ПОЛУГРУППЫ ЭНДОМОРФИЗМОВ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ*

Начало изучения полугрупп эндоморфизмов упорядоченных множеств было положено в работе Л. М. Глускина [1]. В настоящей статье для таких полугрупп решается задача о конкретной характеристике [2].

Идея решения задачи заключается в том, что для полугруппы преобразований S строятся канонические отношения и с их помощью формулируются необходимые и достаточные условия, при которых S является полугруппой эндоморфизмов некоторого упорядоченного множества.

Пусть ρ – произвольное бинарное отношение на множестве X и Δ_x – тождественное бинарное отношение на множестве X.

Отношением порядка (сокращенно *порядком*) будем называть транзитивное рефлексивное антисимметричное бинарное отношение. Порядок Δ_x на множестве X назовем *тривиальным*.

Пусть $F(X)$ – полугруппа всех преобразований множества X, и пусть на X задан порядок ρ.

Преобразование $f \in F(X)$, удовлетворяющее условию

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \rho \text{ (где } (x, y) \in X \text{)},$$

называется *эндоморфизмом отношения порядка ρ*. Множество таких эндоморфизмов с операцией композиции образуют полугруппу, которую обозначим $\mathrm{End}(X, \rho)$.

Задачу о конкретной характеристике полугруппы эндоморфизмов упорядоченного множества можно сформулировать следующим образом: для полугруппы преобразований S найти необходимые и достаточные условия, при которых на множестве X существует нетривиальный порядок ρ такой, что полугруппа S совпадает с полугруппой эндоморфизмов $\mathrm{End}(X, \rho)$.

Для полугруппы преобразований S введем следующие обозначения:

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (грант № 99-1224).

для преобразования $f \in S$ символ $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_f$ будет обозначать, что $f(u) = x$, $f(v) = y$ или сокращенно $f^2(u,v) = (x,y)$;

символ $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$ будет обозначать, что $\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_f$ для некоторого преобразования $f \in S$;

символ $\urcorner\begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}_f$ будет обозначать, что для любого $f \in S$ выполняется $f^2(u,v) \neq (x,y)$, т.е. $f(u) \neq x$ либо $f(v) \neq y$.

Композицию преобразований f, g будем обозначать fg.

Определим для полугруппы S канонические отношения по формулам

$$P = \left\{(x,y) \in X^2 \setminus \Delta_X : (\forall\, u, v \in X) \quad \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} v & u \\ x & y \end{pmatrix} \right\}, \qquad Q = X^2 \setminus P.$$

Полугруппу S будем называть 2-ограниченно замкнутой, если для любого $f \in F(X)$ из условия, что для любых $x, y \in X$ существует преобразование $\varphi \in S$, для которого ограничение $\varphi \mid \{x, y\}$ совпадает с ограничением $f \mid \{x, y\}$, следует $f \in S$. Другими словами, полугруппа S является 2-ограниченно замкнутой, если она содержит все такие преобразования φ множества X, ограничения которых на двух элементных подмножествах X совпадают с ограничениями преобразований f из S.

ТЕОРЕМА. Полугруппа S преобразований множества X в том и только том случае является полугруппой эндоморфизмов некоторого нетривиального порядка на множестве X, если S является 2-ограниченно замкнутой полугруппой, и ее канонические отношения удовлетворяют следующим аксиомам:

($A1$) если $(x, y), (u, v) \in Q$ и $\urcorner\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$, то $\begin{pmatrix} x & y \\ v & u \end{pmatrix}$;

($A2$) если x, y, u, v $(u \neq v)$ – любые элементы из X и

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ v & u \end{pmatrix},$$

то $(x, y) \in P$;

($A3$) если x, y, u, v, w – любые элементы из X, для которых

$$(x, y), (u, v), (v, w) \in Q \text{ и } \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y \\ v & w \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} x & y \\ u & w \end{pmatrix};$$

($A4$) для любых $(x, y) \in Q$ выполняется

$$\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полученный результат даёт алгоритм решения задачи о том, какая полугруппа преобразований конечного множества является полугруппой эндоморфизмов упорядоченного множества. С другой стороны, эти результаты можно применять в изучении абстрактных и элементарных свойств полугрупп эндоморфизмов упорядоченных множеств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Глускин Л.М.* Полугруппы изотонных преобразований // УМН. 1961. Т. 16, вып. 5. С. 157 – 162.

2. *Улам С.* Нерешённые математические задачи. М.: Наука, 1964.

УДК 519.864.3

А. В. Белгородский, С. И. Дудов

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИРОВАННОГО ЗАПАСА КАЧЕСТВА СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ РИСКОВЫХ БУМАГ*

1. Одна из возможных формализаций задачи формирования оптимального портфеля ценных рисковых бумаг имеет следующий вид:

$$u(x) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{1}$$

Здесь x_i – доля вложений капитала инвестора в i-й вид ценных бумаг, а $u(x)$ – значение некоторой функции полезности портфеля со структурой $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

Предположим, мы решили задачу (1) и x^* – структура оптимального портфеля. Но по своей практической реализации процесс формирования портфеля по уже известной оптимальной структуре не является тривиальным. Возможны отклонения от запланированной структуры из-за различных факторов объективного характера, случайных причин, форсмажорных обстоятельств.

Пусть число $u_0 < u(x^*)$ выражает допустимый уровень полезности портфеля. Обозначим через

$$D = \left\{x \in R^n : u(x) \geq u_0\right\}, \quad S = \left\{x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).