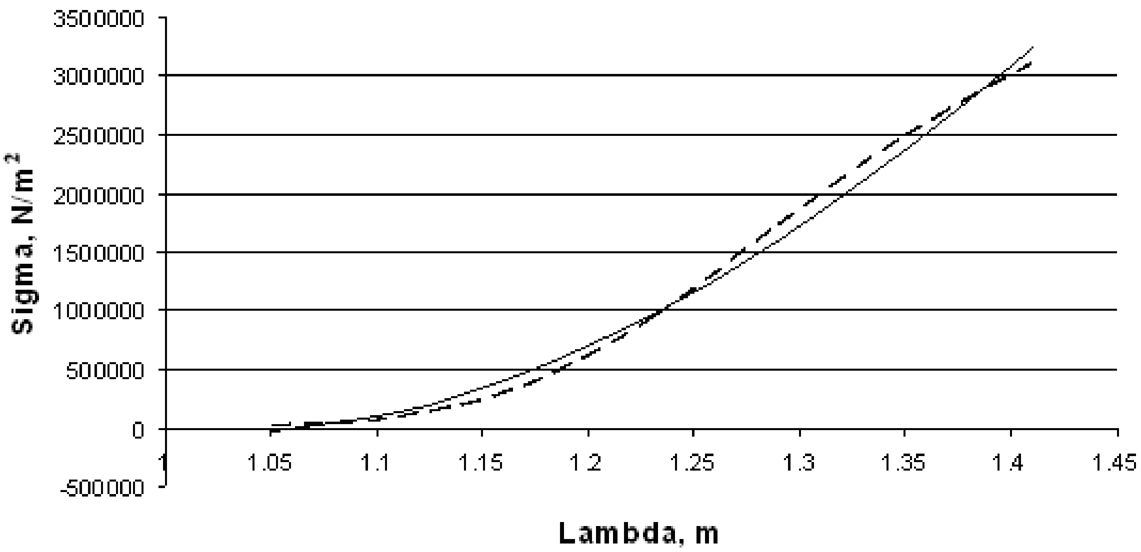

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Крылов В.В., Ткачев В.В., Добровольский Г.Ф.* Микрохирургия аневризм виллизиевого многоугольника. М., 2004. 160 с.

2. *Holzapfel G.A., Gasser T.C., Ogden R.W.* A New Constitutive Framework for Arterial Wall Mechanics and a Comparative Study of Material Models // J. of Elasticity. 2000. V. 61. P. 1-48.

3. *Грин А., Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., 1965, – 456 с.

4. *Carew T. E., Vaishnav R. N., Pater D. J.* Compressibility and Constitutive Equation for Arterial Wall // Circ. Res. 1968. V. 23. P. 61-68.

5. *Пуриня Б.А., Касьянов В.А.* Биомеханика крупных кровеносных сосудов человека. Рига: Зинате, 1980. 260 с.

УДК 533.6.011

В.С. Кожанов

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА САПУНКОВА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О СХОДЯЩЕЙСЯ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

В статье описывается модификация метода приближенного аналитического решения задачи о сходящейся ударной волне, предложенного Я.Г. Сапунковым [1].

Чтобы описать автомодельное течение жидкости с отношением удельных теплоемкостей γ за ударной волной (УВ) в задаче о схождении цилиндрической ($\nu = 1$) или сферической ($\nu = 2$) УВ необходимо решить задачу для системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\xi V'(\xi)=\Delta_1/\Delta_0=-(\nu+1)\,V+\varkappa+(V-\alpha)\,\Delta_4/\Delta_0,$$

$$\xi\,(\ln G(\xi))'=\Delta_2/\Delta_0=-\varkappa/(V-\alpha)-\Delta_4/\Delta_0, \quad (1)$$

$$\xi Z'(\xi) = \Delta_3/\Delta_0 = -Z\left\{[2(V-1)+(\gamma-1)\varkappa]\big/(V-\alpha)+(\gamma-1)\Delta_4/\Delta_0\right\},$$
$$\Delta_0 = (V-\alpha)^2 - Z,\ \Delta_4 = \nu V^2 - [(\nu+1)\alpha + \varkappa - 1]V + \varkappa\alpha,\ \varkappa = 2(1-\alpha)/\gamma,$$

с граничными условиями на поверхности УВ при $\xi = 1$:

$$V(1) = V_S = \frac{2\alpha}{\gamma+1},\ G(1) = G_S = \frac{\gamma+1}{\gamma-1},\ Z(1) = Z_S = \frac{2\gamma(\gamma-1)\alpha^2}{(\gamma+1)^2} \qquad (2)$$

и вдали от УВ при $\xi \to \infty$: $V(\infty) = 0$, $Z(\infty) = 0$.

При этом само автомодельное движение представляется в форме

$$u = rt^{-1}V(\xi),\ \rho = \rho_0 G(\xi),\ c^2 = r^2 t^{-2} Z(\xi),\ \xi = A^{-1} r t^{-\alpha},$$

где время t и координата r – независимые размерные переменные, ξ – независимая автомодельная переменная, а V, G и Z – автомодельные представители скорости жидкой частицы u, плотности ρ и квадрата скорости звука c^2 соответственно.

Решение поставленной задачи будет аналитическим, если функции V, G и Z будут аналитическими на предельной характеристике, ограничивающей область влияния течения за УВ на УВ. Этого можно достичь подбором показателя автомодельности α, к определению которого сводиться первый этап решения. На плоскости OVZ данное требование означает, что интегральная кривая ОДУ $dZ/dV = \Delta_3/\Delta_1$, выходящая из точки $S(V_S, Z_S)$, должна проходить аналитическим образом через особую точку $B(V_B, Z_B)$:

$$V_B = \left(D \pm \sqrt{D^2 - 4\nu\varkappa\alpha}\right)\Big/(2\nu),\ Z_B = (V_B - \alpha)^2,\ D = (\nu+1)\alpha + \varkappa - 1.$$

Система (1) является нелинейной, и к настоящему моменту получить ее аналитическое решение не удалось. Поэтому некоторые авторы проводят упрощение системы (1) с целью построения простого приближенного аналитического решения задачи.

Так, в соответствии с методом Я.Г. Сапункова необходимо в области между УВ и предельной характеристикой отношение Δ_4/Δ_0, фигурирующее в правых частях уравнений (1), положить постоянным и равным его значению в точке S, соответствующей УВ на плоскости OVZ. Решение упрощенной таким образом системы (1), удовлетворяющее граничному условию (2), имеет вид [1]

$$V = A + (V_S - A)\,\xi^{-(\nu+1-K)},$$
$$\frac{G}{G_S} = \left(\frac{V-\alpha}{V_S-\alpha}\right)^{\delta_1}\left(\frac{V-A}{V_S-A}\right)^{\delta_2},\ \frac{Z}{Z_S} = \left(\frac{V-\alpha}{V_S-\alpha}\right)^{\beta_1}\left(\frac{V-A}{V_S-A}\right)^{\beta_2}, \qquad (3)$$

$$\beta_1 = -\varkappa/A_1,\ \beta_2 = \{A[(\gamma-1)(\nu+1)+2]-2\}/A_1,\ \delta_1 = -\beta_1,\ \delta_2 = A(\nu+1)/A_1,$$

$$A = (\varkappa - \alpha K) \,/\, (K - \alpha - 1)\,,\; K = \Delta_4/\Delta_0\big|_{(V_S, Z_S)},\; A_1 = (\nu + 1)\,\alpha - \varkappa.$$

Для определения значения α получается нелинейное алгебраическое уравнение

$$Z_S \frac{(V_B-\alpha)^{\beta_1-2}}{(V_S-\alpha)^{\beta_1}} \left(\frac{V_B-A}{V_S-A}\right)^{\beta_2} - 1 = 0. \tag{4}$$

Простота допущения, лежащего в основе метода Я.Г. Сапункова, позволяет провести модификацию метода с целью увеличения точности определения приближенного значения показателя автомодельности.

Модификация заключается в замене постоянной K на функцию $K_L(\gamma) = l \cdot K$, $l = l(\gamma)$ в выражениях (3), (4). При этом параметр $0 \leqslant l \leqslant 1$ можно подобрать так, что значение α, полученное решением приближенного уравнения (4), будет равно значению показателя автомодельности, полученному при решении исходной автомодельной задачи.

Вычислительная сложность определения l для каждого конкретного значения показателя адиабаты γ сравнима со сложностью определения самого показателя автомодельности. Компромиссом между точностью и простотой вычисления α в данном случае может стать построение приближенной зависимости $l = l(\gamma)$.

Ниже представлены результаты расчетов для случая, когда особая точка $B(V_B, Z_B)$ является *седлом.* Для $\nu = 1$ это значения γ из интервала (1,1.9092), а для $\nu = 2$ – (1,1.8698).

Приближенные зависимости $l = l(\gamma)$ для цилиндрически и сферически симметричной УВ на установленных интервалах значений γ определяются формулами

$$\begin{aligned}\nu = 1:\;\; l(\gamma) = -0.64415863\gamma^3 + 2.31048863\gamma^2 - 3.23266318\gamma\, + \\ + 2.44459306 + 0.03034383\ln(\gamma - 0.999300);\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\nu = 2:\;\; l(\gamma) = -1.17563185\gamma^3 + 4.39205110\gamma^2 - 6.04678839\gamma\, + \\ + 3.78212186 + 0.04106372\ln(\gamma - 0.999200).\end{aligned} \tag{6}$$

В таблице приведены значения показателя автомодельности α, вычисленные как по оригинальному методу Я.Г. Сапункова (α_{Sap}), так и по предлагаемой модификации (α_{SapMod}) для нескольких значений γ. Приближенные значения сравниваются с точным значением α (несовпадающие цифры имеют меньший размер).

	$\nu = 1$			$\nu = 2$		
γ	α	α_{Sap}	α_{SapMod}	α	α_{Sap}	α_{SapMod}
1.01	0.9475104	0.94772	0.9475113	0.9018677	0.90240	0.9018662
1.05	0.9071206	0.90741	0.9071216	0.8322469	0.83289	0.8322510
1.10	0.8852480	0.88552	0.8852470	0.7959697	0.79655	0.7959667
1.20	0.8611630	0.86137	0.8611613	0.7571418	0.75759	0.7571354
9/7	0.8480493	0.84821	0.8480485	0.7365975	0.73695	0.7365947
1.30	0.8462231	0.84638	0.8462225	0.7337767	0.73411	0.7337746
7/5	0.8353231	0.83543	0.8353233	0.7171745	0.71742	0.7171754
1.50	0.8267475	0.82683	0.8267478	0.7044280	0.70460	0.7044293
1.60	0.8196996	0.81975	0.8196997	0.6941895	0.69430	0.6941898
5/3	0.8156249	0.81566	0.8156249	0.6883768	0.68845	0.6883767
1.70	0.8137404	0.81377	0.8137403	0.6857165	0.68577	0.6857163
1.80	0.8085999	0.80861	0.8085998	0.6785536	0.67857	0.6785535
1.90	0.8040990	0.80410	0.8040990	—	—	—

Максимальная относительная погрешность вычисления значения α с использованием модифицированного метода Я.Г. Сапункова, когда параметр l определяется по формуле (5) (для $\nu = 1$) или (6) (для $\nu = 2$), по сравнению со значением α, вычисляемым с использованием метода Рунге-Кутты, составляет не более $0.215 \cdot 10^{-3}\%$ (для $\nu = 1$) и $0.882 \cdot 10^{-3}\%$ (для $\nu = 2$).

Автор благодарит И.А. Чернова за внимание к работе.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Сапунков Я.Г.* Приближенное аналитическое решение задачи о сходящейся ударной волне // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007. Вып. 9. С. 145-147.

УДК 533.6.011

Е.О. Кузнецова

ТРАНСЗВУКОВЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЗГ-РЕШЕНИЙ

В данной статье изучен вопрос построения первых двух поправок в трансзвуковых разложениях с использованием решений Заславского – Гриба (ЗГ) в качестве нулевого приближения.

В статье [1] рассмотрены трансзвуковые разложения, в которых решение уравнений газовой динамики представляется рядом по степеням малого параметра (характеризующего отклонение от однородного потока). В первом приближении решается система уравнений Кармана – Фальковича, для дальнейших приближений получают неоднородные линейные уравнения, правые части которых зависят от предшествующих слагаемых.