$$\begin{pmatrix} x & y \\ x & y \end{pmatrix}.$$

Таким образом, полученный результат даёт алгоритм решения задачи о том, какая полугруппа преобразований конечного множества является полугруппой эндоморфизмов упорядоченного множества. С другой стороны, эти результаты можно применять в изучении абстрактных и элементарных свойств полугрупп эндоморфизмов упорядоченных множеств.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Глускин Л.М.* Полугруппы изотонных преобразований // УМН. 1961. Т. 16, вып. 5. С. 157 – 162.

2. *Улам С.* Нерешённые математические задачи. М.: Наука, 1964.

УДК 519.864.3

А. В. Белгородский, С. И. Дудов

ОБ ОПТИМИЗАЦИИ ГАРАНТИРОВАННОГО ЗАПАСА КАЧЕСТВА СТРУКТУРЫ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ РИСКОВЫХ БУМАГ*

1. Одна из возможных формализаций задачи формирования оптимального портфеля ценных рисковых бумаг имеет следующий вид:

$$u(x) \to \max, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1. \tag{1}$$

Здесь x_i – доля вложений капитала инвестора в i-й вид ценных бумаг, а $u(x)$ – значение некоторой функции полезности портфеля со структурой $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

Предположим, мы решили задачу (1) и x^* – структура оптимального портфеля. Но по своей практической реализации процесс формирования портфеля по уже известной оптимальной структуре не является тривиальным. Возможны отклонения от запланированной структуры из-за различных факторов объективного характера, случайных причин, форсмажорных обстоятельств.

Пусть число $u_0 < u(x^*)$ выражает допустимый уровень полезности портфеля. Обозначим через

$$D = \left\{x \in R^n : u(x) \ge u_0\right\}, \; S = \left\{x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}.$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

Тогда $D_0 = D \cap S$ – множество векторов, выражающих структуру портфеля, которая устраивает инвестора в смысле значения функции полезности. Рассмотрим задачу

$$\varphi(x) \equiv \min_{y \in \Omega \cap S} \|x - y\| \to \max_{x \in D_0}, \tag{2}$$

где $\| \cdot \|$ – евклидова норма, а $\Omega = \overline{R^n / D}$.

Если $x \in D_0$, то сечение шара радиуса $\varphi(x)$ с центром в точке x гиперплоскостью S содержится в D_0. Поэтому если при формировании портфеля по структуре x инвестор допустит отклонения $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n)^T$ такие, что $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = 0$ и при этом $\|\Delta x\| \le \varphi(x)$, то его портфель будет удовлетворять допустимому уровню полезности: $u(x + \Delta x) \ge u_0$. Чем больше значение $\varphi(x)$, которое можно назвать гарантированным запасом качества, тем больше возможностей для "маневрирования" у инвестора при формировании портфеля. В этом и заключается смысл решения задачи (2).

2. Будем далее считать, что функция полезности $u(x)$ является конечной и вогнутой функцией на всем пространстве R^n. В частности [1], она может иметь вид $u(x) = m^T x - \lambda x^T V x$, где $m = (m_1, m_2, ..., m_n)^T$ – вектор эффективностей вложений в каждый вид ценных бумаг, $V = (V_{ij}),\ i, j = \overline{1, n}$, – положительно определённая матрица ковариаций случайных величин отклонения эффективностей ценных рисковых бумаг от ожидаемых, а λ – некоторое положительное число, являющееся показателем относительной важности доходности и рисковости портфеля.

Обозначим через riD_0 относительную внутренность множества D_0.

ТЕОРЕМА 1. Функция $\varphi(x)$ является вогнутой на множестве D_0, а её супердифференциал в точках $x \in riD_0$ можно выразить формулой

$$\overline{\partial}\varphi(x) = co\left\{ \frac{x - y}{\|x - y\|} : y \in Q(x) \right\}, \tag{3}$$

где $Q(x) = \{ y \in \Omega \cap S : \varphi(x) = \|x - y\| \}$, а coA – выпуклая оболочка множества A.

Доказательство. Доказательство вогнутости функции $\varphi(x)$ можно дать, фактически повторяя соответствующее доказательство вогнутости функции расстояния в несколько другой ситуации из работы [2].

Пусть $x \in riD_0$. Тогда $x \notin Q(x)$ и функция $F(x, y) = \|x - y\|$ дифференцируема, в смысле Фреше, по x для любого $y \in Q(x)$.

Теперь, используя дифференциальные свойства функции маргинального вида [3, с. 233] и известный факт из выпуклого анализа [4, с. 27], получаем

$$\varphi'(x,g)=\lim_{\alpha\downarrow 0}\alpha^{-1}\left[\varphi(x+\alpha g)-\varphi(x)\right]=\min_{y\in Q(x)}\left\langle \frac{dF(x,y)}{dx},g\right\rangle=\min_{y\in Q(x)}\left\langle \frac{x-y}{\|x-y\|},g\right\rangle=$$

$$=\min_{v\in\left\{\frac{x-y}{\|x-y\|};\,y\in Q(x)\right\}}\langle v,g\rangle=\min_{v\in co\left\{\frac{x-y}{\|x-y\|};\,y\in Q(x)\right\}}\langle v,g\rangle,\quad \forall g\in R^n. \qquad (4)$$

С другой стороны, основное дифференциальное свойство супердифференциала вогнутой функции [4, с. 55] заключается в том, что

$$\varphi'(x,g)=\min_{v\in\partial\varphi(x)}\langle v,g\rangle,\quad \forall g\in R^n. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) в соответствии с известными фактами из выпуклого анализа следует формула (2). □

Получим необходимое и достаточное условие решения задачи (2).

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы точка $x^0\in riD_0$ была решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы $0_n\in\overline{\partial\varphi}(x^0)$.

Доказательство. Обозначим через $K(x^0,D_0)$ конус возможных направлений множества D_0 в точке x^0, а $K^+(x^0,D_0)$ – сопряжённый к нему конус. Как известно [5, с. 142], необходимым и достаточным условием максимума вогнутой функции $\varphi(x)$ на выпуклом множестве D является соотношение

$$\left\{-\overline{\partial\varphi}(x_0)\right\}\cap K^+(x_0,D)\neq\varnothing. \qquad (6)$$

Так как $x^0\in riD_0$, то $K(x^0,D_0)=K(x^0,S)$. Поскольку гиперплоскость S можно записать в виде $S=\left\{x\in R^n: f(x)=0\right\}$, где $f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i-1$, то, используя наработанную в [5, с. 188 – 190] технику вычисления конусов возможных направлений и сопряжённых к ним, нетрудно доказать, что

$$K^+(x^0,D_0)=K^+(x_0,S)=\left\{w=(w_1,w_2,\dots,w_n)\in R^n: w_i=w_j;\, i,j=\overline{1,n}\right\}. \quad (7)$$

Поскольку $x^0\in S$ и $Q(x^0)\subset S$, то $x^0-y\in S_0\equiv\left\{x\in R^n:\sum_{i=1}^{n}x_i=0\right\}$, $\forall y\in Q(x^0)$. Следовательно, в силу формулы (3), и $\overline{\partial\varphi}(x^0)\subset S_0$. Поэтому, учитывая (7), выполнение (6) эквивалентно тому, что существует элемент $v=(v_1,v_2,\dots v_n)\in\overline{\partial\varphi}(x^0)$ такой, что $\sum_{i=1}^{n}v_i=0$ и $v_i=v_j$, $i,j=\overline{1,n}$. А это возможно тогда и только тогда, когда $v=0_n$, то есть $0_n\in\overline{\partial\varphi}(x^0)$. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Первозванский А.А.* Оптимальный портфель ценных бумаг на нестационарном неравновесном рынке // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35, № 3. С. 63 – 68.

2. *Дудов С.И.* Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36, № 5. С. 153 – 159.

3. *Демьянов В.Ф. Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

4. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.

5. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

УДК 517.984

С. А. Бутерин

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА СВЁРТКИ*

Рассмотрим интегральный оператор $A = A(M, g, \nu)$ вида

$$Af = Mf + g(x)\int_0^\pi f(t)\nu(t)dt, \quad Mf = \int_0^x M(x-t)f(t)dt, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{1}$$

В статье исследуется следующая обратная задача: по совокупности характеристических чисел $\{\lambda_k\}$ оператора $A(M, g, \nu)$ вида (1) найти функцию $M(x)$ в предположении, что функции $g(x)$, $\nu(x)$ известны a priori.

Пусть функция $M(x)$ имеет вид

$$M(x) = -i + \int_0^x (x-t)N(t)dt, \text{ где } (\pi - x)N(x) \in L_2(0,\pi). \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $H(x)$, являющуюся решением уравнения

$$H(x) = N(x) - i\int_0^x H(t)dt\int_0^{x-t} N(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Можно показать, что $(\pi - x)H(x) \in L_2(0,\pi)$.

<u>Определение.</u> Будем говорить, что $A = A(M, g, \nu) \in \mathrm{A}$, если $M(x)$ имеет вид (2), $g(x), \nu(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $a_1 a_2 \ne 0$, где

$$a_1 = 1 + ig(0)\nu(0) + \int_0^\pi \left(ig'(t) + \int_0^t H(t-\tau)g(\tau)d\tau \right) dt, \quad a_2 = ig(0)\nu(\pi).$$

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1) и Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).