БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Первозванский А.А.* Оптимальный портфель ценных бумаг на нестационарном неравновесном рынке // Экономика и математические методы. 1999. Т. 35, № 3. С. 63 – 68.

2. *Дудов С.И.* Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы // ЖВМ и МФ. 1996. Т. 36, № 5. С. 153 – 159.

3. *Демьянов В.Ф. Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

4. *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. М.: Наука, 1981.

5. *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. М.: Наука, 1980.

УДК 517.984

С. А. Бутерин

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ОПЕРАТОРА СВЁРТКИ*

Рассмотрим интегральный оператор $A = A(M, g, v)$ вида

$$Af = Mf + g(x)\int_0^{\pi} f(t)v(t)dt, \quad Mf = \int_0^{x} M(x-t)f(t)dt, \quad 0 \le x \le \pi. \tag{1}$$

В статье исследуется следующая обратная задача: по совокупности характеристических чисел $\{\lambda_k\}$ оператора $A(M, g, v)$ вида (1) найти функцию $M(x)$ в предположении, что функции $g(x)$, $v(x)$ известны a priori.

Пусть функция $M(x)$ имеет вид

$$M(x) = -i + \int_0^{x}(x-t)N(t)dt, \text{ где } (\pi - x)N(x) \in L_2(0,\pi). \tag{2}$$

Рассмотрим функцию $H(x)$, являющуюся решением уравнения

$$H(x) = N(x) - i\int_0^{x} H(t)dt \int_0^{x-t} N(\tau)d\tau. \tag{3}$$

Можно показать, что $(\pi - x)H(x) \in L_2(0,\pi)$.

Определение. Будем говорить, что $A = A(M, g, v) \in \mathrm{A}$, если $M(x)$ имеет вид (2), $g(x), v(x) \in W_2^1[0,\pi]$, $a_1 a_2 \ne 0$, где

$$a_1 = 1 + ig(0)v(0) + \int_0^{\pi}\left(ig'(t) + \int_0^{t} H(t-\tau)g(\tau)d\tau \right)dt, \quad a_2 = ig(0)v(\pi).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1) и Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).

Решение обратной задачи приведём для операторов класса А. В [1] доказывается теорема единственности решения данной обратной задачи.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A = A(M, g, \nu) \in \mathrm{A}$, тогда характеристические числа $\{\lambda_k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, оператора A имеют вид

$$\lambda_k = 2k + \alpha + \beta_k, \ \lambda_k \neq 0, \ \{\beta_k\} \in l_2, \tag{4}$$

и выполняютея условия согласования с функциями $g(x)$, $\nu(x)$:

$$p = -\int_0^\pi g(t)\nu(t)dt, \ a_2 = \gamma \exp(i\alpha\pi), \tag{5}$$

где

$$p = \frac{i\pi}{\exp(-i\alpha\pi) - 1} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^0} - \frac{1}{\lambda_k} \right), \ \gamma = (1 - \exp(i\alpha\pi))^{-1} \prod_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}, \tag{6}$$

если α не является целым четным числом, и

$$p = \frac{\pi}{2i} - \frac{1}{\lambda_{-\alpha/2}} + \sum_{k=-\infty, k \neq -\alpha/2}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^0} - \frac{1}{\lambda_k} \right), \ \gamma = \frac{i}{\pi\lambda_{-\alpha/2}} \prod_{k=-\infty, k \neq -\alpha/2}^{\infty} \frac{\lambda_k^0}{\lambda_k}, \tag{6`}$$

в противном случае. Здесь $\lambda_k^0 = 2k + \alpha$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть заданы функции $g(x), \nu(x) \in W_2^1[0, \pi]$ такие, что $g(0)\nu(\pi) \neq 0$, и последовательность комплексных чисел $\{\lambda_k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, вида (4), удовлетворяющих условиям согласования (5). Тогда существует единственный оператор $A(M, g, \nu) \in \mathrm{A}$, для которого $\{\lambda_k\}$ являются характеристическими числами.

Доказательству теоремы 2 предпошлем следующее утверждение.

ЛЕММА. Даны числа $\{\lambda_k\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, вида (4). Обозначим

$$\mathrm{X}(\lambda) = \exp(p\lambda) \prod_{k=-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k} \right) \exp\left(\frac{\lambda}{\lambda_k} \right). \tag{7}$$

Тогда для $\mathrm{X}(\lambda)$ имеет место представление

$$\mathrm{X}(\lambda) = \gamma(1 - \exp(i(\alpha - \lambda)\pi)) + \int_0^\pi w(t) \exp(-i\lambda t) dt, \tag{8}$$

где $w(x) \in L_2(0, \pi)$, а числа p, γ определяются по формулам (6) или (6`), смотря по тому, $\exp(i\alpha\pi) \neq 1$ или $\exp(i\alpha\pi) = 1$.

Схема доказательства теоремы 2. Известно, что характеристические числа $\{\lambda_k\}$ оператора A вида (1) совпадают с нулями характеристической функции

$$L(\lambda) = 1 - \lambda \int_0^T \nu(x) g(x, \lambda) dx, \tag{9}$$

где $g(x, \lambda) = (E - \lambda M)^{-1} g$, E – тождественный оператор.

Построим функцию $X(\lambda)$ по формуле (7). Тогда согласно лемме для $X(\lambda)$ справедливо представление (8). Как и в [1], приходим к нелинейному интегральному уравнению

$$(\pi - x)H(x) = \varphi(x) + \sum_{j=1}^{\infty}\left(b_j(x)H^{*j}(x) + \int_0^x B_j(x,t)H^{*j}(t)dt \right), \tag{10}$$

где $\varphi(x) = (iw(\pi - x) - \mu_0''(\pi - x))/a_2$, $b_1(x) \equiv 0$, $b_j(x) = i^{j+1}(\pi - x)^j / j!$, $j \geq 2$, функция $w(x)$ определена посредством (8), $H^{*1} = H$, $H^{*(j+1)} = H * H^{*j}$,

$$B_j(x,t) = -\frac{i^j}{a_2}\frac{(\pi - x)^{j-2}}{j!}\big(j(j-1)\mu_0(\pi - x + t) + 2j(\pi - x)\mu_0'(\pi - x + t) +$$

$$+ (\pi - x)^2 \mu_0''(\pi - x + t)\big), \quad j \geq 1, \quad \mu_0(x) = \int_x^{\pi} v(t)g(t - x)dt.$$

Следующий факт играет главную роль в доказательстве теоремы 2.

ТЕОРЕМА 3. Если выполняются условия (5), то уравнение (10) имеет единственное решение $H(x)$, такое что $(\pi - x)H(x) \in L_2(0,\pi)$.

Итак, получив $H(x)$, находим функцию $N(x)$ из уравнения (3). Можно показать, что $(\pi - x)N(x) \in L_2(0,\pi)$. Таким образом, приходим к некоторому оператору $A = A(M, g, v)$ вида (1). Нетрудно показать [1, 2], что его характеристическая функция имеет вид

$$L(\lambda) = a_1 - a_2 \exp(-i\lambda\pi) + \int_0^{\pi} w(t)\exp(-i\lambda t)dt. \tag{11}$$

Вычитая (8) из (11) и учитывая (5), имеем $L(\lambda) - X(\lambda) = a_1 - \gamma$ и, так как в силу (7), (9) $L(0) = X(0) = 1$, то $a_1 = \gamma$. Следовательно, $L(\lambda) = X(\lambda)$, а значит, $A \in \mathrm{A}$, и характеристические числа оператора A совпадают с $\{\lambda_k\}$. Единственность следует из единственности решения уравнения (10) [1]. Теорема 3 доказана.

Замечание. Из (6), (6`) видно, что условия (5) в теореме 2 можно не накладывать, предполагая два элемента последовательности $\{\lambda_k\}$ незаданными.

Аналогичные результаты имеют место для случая, когда оператор M подобен любой целой положительной степени оператора интегрирования.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Бутерин С.А.* О единственности восстановления одномерного возмущения оператора свёртки // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 15 – 18.

2. *Юрко В.А.* Обратная задача для интегральных операторов // Мат. заметки. 1985. Т. 37(5). С. 690 – 701.