что последовательность полиномов Дирихле $T_n(s)$ равномерно сходится к L-функции в любой ограниченной области комплексной плоскости. В связи с этим встаёт ряд задач, связанных с расположением нулей полиномов $T_n(s)$. Но в данной статье эти задачи рассматриваться не будут.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кузнецов В.Н.* Аналог теоремы Сеге для одного класса рядов Дирихле // Мат. заметки. 1984. Т. 36, № 6. С. 805 – 813.

2. *Кузнецов В.Н.* О граничных свойствах степенных рядов с конечнозначными коэффициентами // Дифференциальные уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1987. С. 9 –16.

3. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Теория функций и приближений: Тр. 3-й Сарат. зимней шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 2. С. 113 – 115.

4. *Бибербах Л.* Аналитическое продолжение. М.: Наука, 1967.

5. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближений функций. Л.: Изд-во Ленинг. ун-та, 1977.

УДК 517.5

С. С. Волосивец

УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ СВЁРТКИ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЁННОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ*

Пусть $f \in L_p(-\infty;+\infty)$, $1 < p \le 2$. Как известно [1, с. 128], функции $F_N(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-N}^{N} f(t) e^{-ixt}\, dt$ сходятся в $L_{p'}(R)$ $(1/p + 1/p' = 1)$ к некоторому пределу $\hat{f} \in L_{p'}(R)$, называемому преобразованием Фурье функции $f(x)$. При этом

$$\|\hat{f}\|_{L_{p'}(R)} \le K(p) \|f\|_{L_p(R)}.$$

Дадим необходимые определения. Пусть $1 < p < +\infty$, f определена на R. Рассмотрим величину

$$\omega_{1-1/p}(f, \delta) = \sup_{-\infty < a < b < +\infty} \sup_{|\xi| \le \delta} \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p \right)^{1/p},$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03-01-00390) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

где $\xi = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$, а $|\xi| = \max\limits_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$ – диаметр разбиения.

Если для функции $f(x)$ модуль $\omega_{1-1/p}(f,\delta)$ ограничен константой, не зависящей от δ, то говорят, что $f(x)$ принадлежит множеству *функций ограниченной* p*-вариации* $V_p(R)$. Если же $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega_{1-1/p}(f,\delta)=0$, то $f(x)$ называется p*-абсолютно непрерывной функцией* ($f \in C_p(R)$). Норма в пространствах $C_p(R)$ и $V_p(R)$ задается равенством

$$\|f\|_p = \max\left\{\sup_{\delta>0}\omega_{1-1/p}(f,\delta), \|f\|_\infty\right\}.$$

При $k \in N$, $k \ge 2$ по определению

$$\omega_{k-1/p}(f,\delta) = \sup_{|h|\le\delta}\omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1}f(x),|h|),$$

где $\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^k C_k^i(-1)^{k-i}f(x+ih)$. Наконец, через $A_\sigma(f)_p$ будем обозначать наилучшее приближение $f \in C_p(R)$ целыми функциями экспоненциального типа не выше σ [2, с. 22].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in L_p(R)\cap V_p(R)$, $g \in L_q(R)\cap C_q(R)$, где $1 < p,q \le 2$. Если $0<\gamma\le p'q'/(p'+q')$, $m\in N$, и сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty n^{-2\gamma}\omega^{\gamma}_{m-1/q}(g,\pi/n)$, то $\widehat{f * g} = \hat{f}\,\hat{g} \in L_\gamma(R)$.

Доказательство. Для доказательства оценим по неравенству Гельдера

$$\int_{2^l}^{2^{l+1}}\left|\hat{f}(x)\hat{g}(x)\right|^\gamma dx \le \left(\int_{2^l}^{2^{l+1}}\left|\hat{f}(x)\right|^{p'}dx\right)^{\gamma/p'}\left(\int_{2^l}^{2^{l+1}}|\hat{g}(x)|^\beta dx\right)^{1-\gamma/p'}, \qquad (1)$$

где $\beta = p'\gamma/(p'-\gamma)$.

Применим оценки из работы [3].

$$\int_{2^l}^{2^{l+1}}\left|\hat{f}(x)\right|^{p'}dx \le C_1 2^{-lp'/p}\omega^{p'}_{m-1/p}\left(f,\pi/2^{l+1}\right) \le C_2 2^{-lp'/p}$$

и

$$\int_{2^l}^{2^{l+1}}|\hat{g}(x)|^\beta dx \le C_3 2^{-l(1-\beta)}\omega^{\beta}_{m-1/q}\left(g,\pi/2^{l+1}\right), \quad \beta\le q'.$$

Подставляя их в (1), получаем

$$\int_{2^l}^{2^{l+1}}\left|\hat{f}(x)\hat{g}(x)\right|^\gamma dx \le C_4 2^{l(1-2\gamma)}\omega^{\gamma}_{m-1/q}(f,\pi/2^{l+1}).$$

Суммируя эти оценки и используя равносильность сходимости рядов $\sum_{l=1}^\infty 2^{l(1-2\gamma)}\omega^{\gamma}_{m-1/q}(f,\pi/2^{l+1})$ и $\sum_{n=1}^\infty n^{-2\gamma}\omega^{\gamma}_{m-1/q}(f,\pi/n)$, доказываем теорему.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $g \in L_q(R) \cap C_q(R)$, $f \in L_p(R) \cap V_p(R)$, $1 < p,q \le 2$, $0 < \gamma \le p'q'/(p'+q')$. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\gamma} A_n^{\gamma}(f)_p ,$$

то $\hat{f}(x)\hat{g}(x) \in L_\gamma(R)$.

Замечание. Методом доказательства теоремы 1 можно получить, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2\gamma} \omega_{m-1/q}^{\gamma}(f, \pi/n)$ следует существование $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^{\alpha} \left|\hat{f}(x)\right|^{\gamma} |\hat{g}(x)|^{\gamma} dx$, $\alpha > -1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.
2. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
3. *Родин А.М.* Условия интегрируемости преобразования Фурье p-абсолютно непрерывной функции // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 85 – 92.

УДК 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

О КРАЙНИХ ТОЧКАХ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Постановка задачи. Пусть $T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\} \subset [0:1]$, $\Phi(\cdot)$ – дискретное многозначное отображение с образами в виде отрезков $\Phi(t_k) = [y_{1,k} ; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \ge y_{1,k}$, $k \in [0:N]$; $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$. Рассмотрим задачу

$$\rho(A) \overset{df}{=} \max_{k \in [0:N]} f(A,k) \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}} , \tag{1}$$

где $f(A,k) = \max\{ y_{2,k} - p_n(A,t_k), p_n(A,t_k) - y_{1,k} \}$.
Доказано [1], что решение задачи (1) существует. Пусть $\rho^* = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$, $\Re = \left\{ A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^* \right\}$. В случае $N \le n$ решение задачи (1) известно [1]. Считаем $N > n$.