ТЕОРЕМА 2. Пусть $g \in L_q(R) \cap C_q(R)$, $f \in L_p(R) \cap V_p(R)$, $1 < p, q \le 2$, $0 < \gamma \le p'q'/(p'+q')$. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2\gamma} A_n^{\gamma}(f)_p,$$

то $\hat{f}(x)\hat{g}(x) \in L_\gamma(R)$.

Замечание. Методом доказательства теоремы 1 можно получить, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-2\gamma} \omega_{m-1/q}^{\gamma}(f, \pi/n)$ следует существование $\int_{-\infty}^{+\infty} |x|^\alpha \left|\hat{f}(x)\right|^\gamma |\hat{g}(x)|^\gamma dx$, $\alpha > -1$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: Гостехиздат, 1948.
2. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.
3. *Родин А.М.* Условия интегрируемости преобразования Фурье p-абсолютно непрерывной функции // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 85 – 92.

УДК 517.518.82

И. Ю. Выгодчикова

О КРАЙНИХ ТОЧКАХ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ

1. Постановка задачи. Пусть $T = \{t_0 < t_1 < \ldots < t_N\} \subset [0:1]$, $\Phi(\cdot)$ – дискретное многозначное отображение с образами в виде отрезков $\Phi(t_k) = [y_{1,k}; y_{2,k}]$, $y_{2,k} \ge y_{1,k}$, $k \in [0:N]$; $p_n(A,t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ – алгебраический полином степени не выше n с вектором коэффициентов $A = (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in R^{n+1}$. Рассмотрим задачу

$$\rho(A) \overset{df}{=} \max_{k \in [0:N]} f(A,k) \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}, \tag{1}$$

где $f(A,k) = \max\{y_{2,k} - p_n(A,t_k), p_n(A,t_k) - y_{1,k}\}$.

Доказано [1], что решение задачи (1) существует. Пусть $\rho^* = \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A)$, $\Re = \left\{A \in R^{n+1} : \rho(A) = \rho^*\right\}$. В случае $N \le n$ решение задачи (1) известно [1]. Считаем $N > n$.

Пусть $\sigma, \Delta \subseteq T$: $\sigma = \{t_{j_0} < t_{j_1} < \ldots < t_{j_{n+1}}\}$, $\Delta = \{t_{q_0} < t_{q_1} < \ldots < t_{q_n}\}$, $I(\sigma) = \{k \in [0:N]: t_k \in \sigma\}$, $I(\Delta) = \{k \in [0:N]: t_k \in \Delta\}$.

Рассмотрим подзадачу

$$\rho(A,\sigma) \overset{df}{=} \max_{k \in I(\sigma)} f(A,k) \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}}; \ \rho^*(\sigma) \overset{df}{=} \min_{A \in R^{n+1}} \rho(A,\sigma). \quad (2)$$

Нетрудно показать, что

$$\forall A \in R^{n+1}: \rho(A,\sigma) \le \rho(A); \ \rho^*(\sigma) \le \rho^*. \quad (3)$$

Амплитудными назовём функции

$$\varphi_0(\sigma,t_k) = \begin{cases} y_{2,j_k}, k - \text{чётно}, \\ y_{1,j_k}, k - \text{нечётно}, \end{cases} \varphi_1(\sigma,t_k) = \begin{cases} y_{1,j_k}, k - \text{чётно}, \\ y_{2,j_k}, k - \text{нечётно}, \end{cases} \quad (4)$$
$$t_{j_k} \in \sigma, k \in [0:n+1].$$

Сформулируем для амплитудных функций задачи П.Л. Чебышева [2]

$$\rho_i(A,\sigma) \overset{df}{=} \max_{k \in I(\sigma)} \left| \varphi_i(\sigma,t_{j_k}) - p_n(A,t_{j_k}) \right| \longrightarrow \min_{A \in R^{n+1}},$$
$$\rho_i^*(\sigma) \overset{df}{=} \min_{A \in R^{n+1}} \rho_i(A,\sigma) = \rho_i(A_i^\sigma,\sigma), i = \overline{0,1}. \quad (5)$$

Обозначим через $Z = \left\{ k \in [0:N]: \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2} = \rho^* \right\}$, $|Z|$ – количество элементов множества Z.

2. Вспомогательные факты. Ввиду принятых обозначений, теорему 1 из [1] можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Для того чтобы вектор $A^* \in R^{n+1}$ являлся решением задачи (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

$$\text{а) } \rho(A^*) = \max_{k \in [0:N]} \frac{y_{2,k} - y_{1,k}}{2}; \quad \text{б) } \exists \sigma^*: \rho(A^*) = \rho_i^*(\sigma^*), i = 0 \text{ или } i = 1.$$

При этом $\rho^* = \rho(A^*)$.

Несложно показать, что из условия а) следует $Z \neq \varnothing$.

Приведём утверждение, эквивалентное теореме 2 из [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть A^* – некоторое решение задачи (1). Если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\text{а) } |Z| \ge n+1, \quad \text{б) } \exists \sigma^*: \rho^* = \rho_i^*(\sigma^*), \ i = 0 \text{ или } i = 0,$$

то решение A^* задачи (1) единственно.

В [3] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.

$$\exists A^* \in \Re, \ \exists \Delta^*: \ f(A^*,k) = \rho^*, \ \forall k \in I(\Delta^*). \quad (6)$$

3. Критерий распознавания крайних точек. Обозначим $E(\mathfrak{R})$ множество крайних точек множества $\mathfrak{R}$.

ТЕОРЕМА 4. Все векторы $A^* \in \mathfrak{R}$, которые удовлетворяют условию (6), и только они являются крайними точками множества $\mathfrak{R}$.

Доказательство. I. <u>Достаточность.</u> Пусть для вектора $A^* \in \mathfrak{R}$ выполняется условие (6). Покажем, что $A^* \in E(\mathfrak{R})$. Если решение единственно, утверждение теоремы очевидно.

Пусть $|\mathfrak{R}| = \infty$. Допустим, что утверждение теоремы не верно, то есть $A^* \notin E(\mathfrak{R})$. Последнее означает, что

$$\exists\ A^1, A^2 \in \mathfrak{R},\ A^1 \neq A^2,\quad \exists\ 0 < \lambda < 1:\quad A^* = \lambda^* A^1 + (1-\lambda^*)A^2. \qquad (7)$$

В силу (6) $\forall\, k \in I(\Delta^*)$ либо

$$\rho^* = f(A^*, k) = y_{2,k} - p_n(A^*, t_k) \overset{(7)}{=}$$
$$= \lambda^*\left(y_{2,k} - p_n(A^1, t_k)\right) + (1-\lambda^*)\left(y_{2,k} - p_n(A^2, t_k)\right) \le (\lambda^* + 1 - \lambda^*)\rho^* = \rho^*, \quad (8)$$

либо

$$\rho^* = f(A^*, k) = p_n(A^*, t_k) - y_{1,k} \overset{(7)}{=}$$
$$= \lambda^*\left(p_n(A^1, t_k) - y_{1,k}\right) + (1-\lambda^*)\left(p_n(A^2, t_k) - y_{1,k}\right) \le \lambda^*\rho^* + (1-\lambda^*)\rho^* = \rho^*. \quad (9)$$

Таким образом, в (8), (9) имеем равенства. Ввиду (7) $\lambda^*,\ (1-\lambda^*) \in (0,1)$. Следовательно,

$$y_{2,k} - p_n(A^1, t_k) = \rho^* = y_{2,k} - p_n(A^2, t_k),$$

либо

$$p_n(A^1, t_k) - y_{1,k} = \rho^* = p_n(A^2, t_k) - y_{1,k}.$$

Тогда $\forall\, k \in I(\Delta^*)$, $p_n(A^1, t_k) = p_n(A^2, t_k)$, при этом $|I(\Delta^*)| = n+1$. Итак, полиномы степени не выше n имеют равные значения в $(n+1)$ точках, а значит, $A^1 = A^2$, что противоречит (7).

II. <u>Необходимость.</u> Пусть $A^* \in E(\mathfrak{R})$. Покажем, что имеет место (6).

1. В том случае, если $Z = \varnothing$ или $|Z| \ge n+1$ в силу теорем 1, 2 решение единственно, является крайней точкой и удовлетворяет (6).

2. Пусть $1 \le |Z| < n+1$. Предположим, утверждение теоремы не верно. Тогда $\exists\ MK = \{k_0, k_1, \ldots, k_{N-n}\} \subseteq \{k \in [0:N]: f(A^*, k) < \rho^*\}$. Заметим, что $Z \cap MK = \varnothing$, поскольку $\forall\, k \in Z$, $f(A^*, k) = \rho^*$.

3. Пусть $k_0 \in MK$, обозначим через A^i, $i = 1,2$, решение системы

$$\begin{cases} p_n(A^i, t_k) = p_n(A^*, t_k), & k \in [0:N] \setminus MK, \\ p_n(A^i, t_{k_0}) = p_n(A^*, t_{k_0}) + (3-2i)\varepsilon. & \end{cases} \qquad (10)$$

Возьмём $\varepsilon > 0$ достаточно малым. Тогда ввиду рассуждений предыдущего пункта $\max_{k\in[0:N]} f(A^i,k) = \rho^*$. Следовательно, $A^i \in \Re$, при этом $A^i \neq A^*$, $i = 1,2$ и $A^1 \neq A^2$.

4. Заметим, что $\forall \lambda \in R$, $\forall k \in [0:N] \setminus MK$,

$$p_n(\lambda A^1 + (1-\lambda)A^2, t_k) = \lambda p_n(A^1, t_k) + (1-\lambda)p_n(A^2, t_k) \overset{(10)}{=} p_n(A^*, t_k).$$

Далее, ввиду (10) $\lambda = 1/2$ удовлетворяет уравнению

$$p_n(\lambda A^1 + (1-\lambda)A^2, t_{k_0}) = p_n(A^*, t_{k_0}).$$

5. Итак, значения полиномов $p_n\left(\frac{1}{2}(A^1 + A^2), t\right)$ и $p_n(A^*, t)$ совпадают в $(n+1)$ точках, значит, эти полиномы совпадают. Тогда $A^* = \frac{1}{2}(A^1 + A^2)$, $A^1, A^2 \in \Re$, $A^1 \neq A^2$. Получили противоречие тому, что $A^* \in E(\Re)$. Теорема доказана полностью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Выгодчикова И.Ю.* О наилучшем приближении дискретного мультиотображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 25 – 27.

2. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

3. *Выгодчикова И.Ю.* Об алгоритме решения задачи о наилучшем приближении дискретного многозначного отображения алгебраическим полиномом // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 27 – 31.

УДК 514.764

С. В. Галаев, А. В. Гохман

К ГЕОМЕТРИИ ДИНАМИКИ СО СВЯЗЯМИ ОДНОГО КЛАССА ТОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В работе [1] было показано, что движение материальной точки переменной массы совпадает с геодезической эквипроективной связности. Используя условия [2], при которых эквипроективная связность является римановой, был выделен класс точек, эквивалентных голономным системам постоянной массы. В первой части настоящей статьи находятся условия метризуемости связности специального вида, заданной в неголономном многообразии [3]. Во второй части приводятся пример из динамики точки с переменной массой, демонстрирующий важность проблемы метризуемости допустимой связности [3].