ТЕОРЕМА 5. Материальная точка типа K эквивалентна механической системе постоянной массы с кинетической энергией $T=\frac{1}{2}G_{\alpha\beta}\dot{X}^{\alpha}\dot{X}^{\beta}$ и связью X_3^2.

Доказательство теоремы следует из известных результатов [5] о траекториях динамических систем со связями и из того, что ортогональная проекция связности Леви-Чивита метрики G на многообразие X_3^2 совпадает с исходной связностью.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Гохман А.В.* К геометрии динамики одного класса точек переменной массы // Дифференциальная геометрия. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1974. Вып. 1. С. 15 – 19.

2. *Широков П.А.* Проективно-евклидовы симметрические пространства: Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 73 – 81.

3. *Галаев С.В., Гохман А.В.* Обобщённые гамильтоновы системы на многообразиях со связностью // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 16 – 19.

4. *Вагнер В.В.* Геометрия (n-1)-мерного неголономного многообразия в n-мерном пространстве // Тр. семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1941. Вып. 5. С. 173 – 225.

5. *Вершик А.М., Фаддеев Л.Д.* Лагранжева механика в инвариантном изложении // Проблемы теоретической физики: Сб. статей / Под ред. М.Г. Веселова и др. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. Вып. II. С. 129 – 141.

УДК 517.84

О. Б. Горбунов

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ДИРАКА С НЕИНТЕГРИРУЕМОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ ВНУТРИ ИНТЕРВАЛА*

Рассмотрим краевую задачу $L=L(Q(x),\mu,\eta,\gamma,\alpha,\beta)$ вида

$$By'(x)+\big(Q_\gamma(x)+Q(x)\big)y(x)=\lambda y(x),\quad x\in(0,\pi), \tag{1}$$

$$V_1^T(\alpha)y(0)=V_1^T(\beta)y(\pi)=0, \tag{2}$$

где $y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}, Q_\gamma(x)=\frac{\mu}{x-\gamma}\begin{pmatrix}\sin 2\eta & \cos 2\eta\\ \cos 2\eta & -\sin 2\eta\end{pmatrix}$, $Q(x)=\begin{pmatrix}q_1(x) & q_2(x)\\ q_2(x) & -q_1(x)\end{pmatrix}$,

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1) и Министерства образования РФ (проект Е02-1.0-186).

$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $V(\alpha)=(V_1(\alpha),V_2(\alpha))=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $\gamma\in(0,\pi)$ – фиксированное число, T – знак транспонирования. Здесь $q_k(x)$ – комплекснозначные функции, μ,η,α,β – комплексные числа. Для определённости будем предполагать, что $\operatorname{Re}\mu>0, \mu+1/2\notin N, \alpha,\beta,\eta\in[-\pi/2,\pi/2]$, а также $q_k(x)\in W_1^1(0,\pi)$ и $|q_k(x)|(x-\gamma)^{-2\operatorname{Re}\mu}\in L_1(0,\pi)$.

В работах [1 – 3] построена специальная фундаментальная система решений для склейки в особой точке, получена её асимптотика, изучены свойства спектра задачи L, а также исследованы аналитические и асимптотические свойства функции Вейля задачи L. В частности, показано, что система (1) имеет решения $\Phi_1(x,\lambda)$ и $\Phi_2(x,\lambda)$ такие, что

$$V_1^T(\alpha)\Phi_1(0,\lambda)=V_2^T(\alpha)\Phi_2(0,\lambda)=1,\quad V_1^T(\beta)\Phi_1(0,\lambda)=V_1^T(\alpha)\Phi_2(0,\lambda)=0.$$

Функция $M(\lambda):=V_2^T(\alpha)\Phi_1(0,\lambda)$ называется *функцией Вейля.* Причём $\Phi_2(x,\lambda)$ будет целой по λ при фиксированном $x\neq\gamma$, а $\Phi_1(x,\lambda)$ имеет полюса с собственных значениях задачи L.

Будем говорить, что $L\in W$, если L имеет простой спектр, то есть характеристическая функция имеет только простые нули. Обозначим λ_k – собственные значения задачи L и $a_k=\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_k} M(\lambda)$.

Постановка обратной задачи

По спектральным данным $\{\lambda_k,a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$ *восстановить задачу* L.

Отметим, что в [3] доказана теорема единственности решения поставленной обратной задачи, из которой следует, что, не нарушая общности, можно считать $\alpha=0$.

Договоримся, что наряду с задачей L будем рассматривать задачу $\tilde L=L(\tilde Q(x),\tilde\mu,\tilde\eta,\gamma,\tilde\alpha,\tilde\beta)$. Если некоторый символ A обозначает объект задачи L, то $\tilde A$ – аналогичный объект задачи $\tilde L$.

Пусть задачи $L,\tilde L\in W$ выбраны так, что

$$\alpha=\tilde\alpha=0,\quad Q_\gamma(x)=\tilde Q_\gamma(x),\quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|\lambda_k\tilde a_k|\xi_k<\infty, \tag{3}$$

где $\xi_k=|\lambda_k-\tilde\lambda_k|+|a_k\tilde a_k^{-1}-1|$.

ЛЕММА. Справедливы соотношения

$$\Phi_j(x,\lambda)=\tilde\Phi_j(x,\lambda)+\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\langle\tilde\Phi_j(x,\lambda),\tilde\Phi_2(x,\lambda_k)\rangle}{\lambda-\lambda_k}a_k\Phi_2(x,\lambda_k)-\right.$$
$$\left.-\frac{\langle\tilde\Phi_j(x,\lambda),\tilde\Phi_2(x,\tilde\lambda_k)\rangle}{\lambda-\tilde\lambda_k}\tilde a_k\Phi_2(x,\tilde\lambda_k)\right),$$

$$\frac{\langle \Phi_2(x,\lambda), \Phi_2(x,\theta)\rangle}{\lambda-\theta} - \frac{\langle \widetilde{\Phi}_2(x,\lambda), \widetilde{\Phi}_2(x,\theta)\rangle}{\lambda-\theta} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\langle \widetilde{\Phi}_2(x,\lambda), \widetilde{\Phi}_2(x,\lambda_{k0})\rangle}{\lambda-\lambda_{k0}} \frac{\langle \Phi_2(x,\lambda_{k0}), \Phi_2(x,\theta)\rangle}{\lambda_{k0}-\theta} a_{k0} - \right.$$
$$\left. - \frac{\langle \widetilde{\Phi}_2(x,\lambda), \widetilde{\Phi}_2(x,\lambda_{k1})\rangle}{\lambda-\lambda_{k1}} \frac{\langle \Phi_2(x,\lambda_{k1}), \Phi_2(x,\theta)\rangle}{\lambda_{k1}-\theta} a_{k1} \right),$$

где $j=1,2$, $\langle y,z\rangle := \det(y,z)$, причём ряды сходятся равномерно при $|x-\gamma|\geq \varepsilon$ при любом $\varepsilon>0$.

Лемма доказывается с использованием интегральной формулы Коши и свойств функции Вейля $M(\lambda)$, полученных в [2].

Обозначим $\widetilde{P}_{ni,kj}(x) = \dfrac{\langle \widetilde{\Phi}_2(x,\lambda_{ni}), \widetilde{\Phi}_2(x,\lambda_{kj})\rangle}{\lambda_{ni}-\lambda_{kj}} a_{kj}$, $\lambda_{k0}=\lambda_k$, $\lambda_{k1}=\widetilde{\lambda}_k$, $a_{k0}=a_k$, $a_{k1}=\widetilde{a}_k$, тогда из леммы следует

$$\widetilde{\Phi}_2(x,\lambda_{ni}) = \Phi_2(x,\lambda_{ni}) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\widetilde{P}_{ni,k0}(x)\Phi_2(x,\lambda_{k0}) - \widetilde{P}_{ni,k1}(x)\Phi_2(x,\lambda_{k1})\right). \quad (4)$$

Соотношение (4) не годиться для поиска $\Phi_2(x,\lambda_{ki})$, поскольку оператор в правой части как оператор, действующий из m в m, вообще говоря, не обратим. Однако соотношение (4) можно привести к виду

$$\widetilde{\psi}_{ni}^{<m>}(x) = \psi_{ni}^{<m>}(x) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\widetilde{H}_{ni,k0}(x)\psi_{k0}^{<m>}(x) - \widetilde{H}_{ni,k1}(x)\psi_{k1}^{<m>}(x)\right), \quad (5)$$

где $m=1,2$, $\widetilde{\psi}_{n0}^{<m>}(x) = \chi_n\left(\widetilde{\Phi}_{m2}(x,\lambda_{n0}) - \widetilde{\Phi}_{m2}(x,\lambda_{n1})\right)$, $\chi_n = \begin{cases} \xi_n^{-1}, \xi_n \neq 0, \\ 0, \quad \xi_n = 0, \end{cases}$

$\widetilde{\psi}_{n1}^{<0>}(x) = \widetilde{\Phi}_{m2}(x,\lambda_{n1})$,

$$\begin{bmatrix} \widetilde{H}_{n0,k0}(x) & \widetilde{H}_{n0,k1}(x) \\ \widetilde{H}_{n1,k0}(x) & \widetilde{H}_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \chi_n & -\chi_n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{P}_{n0,k0}(x) & \widetilde{P}_{n0,k1}(x) \\ \widetilde{P}_{n1,k0}(x) & \widetilde{P}_{n1,k1}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_k & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Правая часть (5) определяет линейный ограниченный оператор $E+\widetilde{H}(x)$, действующий из m в m. Согласно второму соотношению леммы $(E+\widetilde{H}(x))(E-H(x)) = E$, если поменять ролями задачи L и $\widetilde{L}$, то $(E-H(x))(E+\widetilde{H}(x)) = E$, значит, $E+\widetilde{H}(x)$ – обратимый оператор.

Соотношение (5) назовём основным уравнением обратной задачи.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы числа $\{\lambda_k, a_k\}_{k=-\infty}^{+\infty}$, $a_k \neq 0$, $\lambda_k \neq \lambda_n$, $(k \neq n)$ были спектральными данными для задачи $L \in W$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) (асимптотика) существует задача $\widetilde{L} \in W$, что имеет место (3);

2) (условие разрешимости основного уравнения) при каждом $x \neq \gamma$ линейный ограниченный оператор $E + \tilde{H}(x)$ имеет ограниченный обратный;

3) $\left(B\kappa(x) - \kappa(x)B\right)|x-\gamma|^{-2\operatorname{Re}\mu} \in L_1(0,\pi)$,

где $\kappa(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(\tilde{\Phi}_2(x,\lambda_k)\Phi_2^T(x,\lambda_k)a_k - \tilde{\Phi}_2(x,\tilde{\lambda}_k)\Phi_2^T(x,\tilde{\lambda}_k)\tilde{a}_k\right)$.

При выполнении этих условий $Q(x) = \tilde{Q}(x) + B\kappa(x) - \kappa(x)B$, $\beta = \tilde{\beta}$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Горбунов О.Б.* О системе Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. Вып. 2. С. 21 – 25.

2. *Горбунов О.Б.* Спектральные свойства системы Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 34 – 37.

3. *Горбунов О.Б.* Об обратной задаче для системы Дирака с неинтегрируемой особенностью внутри интервала // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2002. Вып. 4. С. 37 – 39.

УДК 511.23

Г. И. Гусев, А. И. Бобылев

ОБ ОДНОЙ МОДИФИКАЦИИ ЛЕММЫ ГЕНЗЕЛЯ О ПОДЪЁМЕ РЕШЕНИЯ В ЛОКАЛЬНО КОМПАКТНЫХ НЕАРХИМЕДОВЫХ ПОЛЯХ

Пусть K – локально компактное неархимедово поле нулевой характеристики, V – кольцо целых элементов данного поля, P – его максимальный идеал, π – простой элемент из K, $ord_\pi(\alpha)$ - π-адический показатель элемента $\alpha \in K$. $V[[X_1,...,X_n]]$ – кольцо формальных степенных рядов от n переменных $X_1,...,X_n$ над V.

Обозначим

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n),\ \alpha_i \geq 0,\ \alpha_i \in \mathbf{Z};$$
$$x = (x_1, x_2, ..., x_n),\ x_i \in K;$$
$$c = (c_1, c_2, ..., c_n),\ c_i \in V;$$
$$X = (X_1, ..., X_n).$$

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$, $X^\alpha = X_1^{\alpha_1} ... X_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| - l$ – норма α. $\|x\| = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|_\pi$,

где $|x_i|_\pi = \rho^{ord_\pi(x_i)}$, $(0 < \rho < 1)$ – норма, соответствующая показателю ord_π.

В статье рассмотрим формальные степенные ряды