ТЕОРЕМА 1. Предположим, что в точке $c \in V^n$ первый дифференциал аналитической функции $f(x)$ на компакте V^n не равен тождественно нулю. Обозначим

$$\nu_1(f,c) = \min_{1 \le i \le n} ord_\pi \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)$$

и положим

$$\beta^* = \beta(f,c) = \min\{\beta \mid \nu_1(f,c) < t_2(f) + \beta, \beta \in \mathbf{Z}_0\}.$$

Тогда на компакте $K\left(c, \rho^{\beta^*}\right) = c + \pi^{\beta^*} V^n$ ряд Тейлора $T_c f$ изометрически эквивалентен своей линейной части.

ТЕОРЕМА 2 (модификация леммы Гензеля). В обозначениях теоремы 1 уравнение

$$T_c f(x) = 0$$

разрешимо в компакте $K\left(c, \rho^{\beta^*}\right)$ тогда и только тогда, когда разрешимо в этом же компакте линейное уравнение

$$f(c) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(x_i - c) = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Серр Ж.П.* Алгебры Ли и группы Ли. М.: Мир, 1969.

УДК 517.938; 519.711.3

Е. В. Дивисенко, В. В. Мозжилкин

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

1. Математические модели механических систем описываются краевой задачей для вектора $X(z,t)$

$$\begin{aligned} &A\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + B\frac{\partial X}{\partial t} = F(z,t,X,\frac{\partial^2 X}{\partial z^2},\frac{\partial^3 X}{\partial z^3},\frac{\partial^4 X}{\partial z^4}),\\ &X(z,0) = f(z), \quad \left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_{t=0} = g(z),\\ &X(0,t) = q(t), \quad \left.\frac{\partial X}{\partial z}\right|_{z=0} = u(t),\\ &X(1,t) = v(t), \quad \left.\frac{\partial X}{\partial z}\right|_{z=1} = w(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь z – пространственная переменная, t – время. Некоторые компоненты вектора X могут зависеть только от переменной t.

Важной задачей исследования свойств решений системы (1) является определение предельных циклов и периодических решений. Одним из подходов к решению данной задачи является анализ с помощью рядов Фурье [1]. Суть этого подхода такова. Вектор X представляется отрезком ряда Фурье по переменной t. Коэффициенты ряда определяются из решения краевой задачи системы ОДУ по переменной z. Общее решение представляет собой линейную комбинацию нескольких линейно независимых частных решений однородной системы ОДУ и частного решения неоднородного уравнения в виде линейной функции. В результате подстановок строится нелинейное векторное уравнение для частоты колебаний и коэффициентов отрезка ряда Фурье, которое решается численно.

Такой подход позволяет определить периодические решения. Однако, если подобное решение не удается построить, это не гарантирует его отсутствия. Этот метод достаточно жёстко навязывает структуру решения исходной краевой задачи (1), которая не может быть реализована в общем случае. Если решение нелинейной алгебраической системы не найдено, или оно не удовлетворяет физическим требованиям, формально этот факт свидетельствует только о том, что конкретный решатель не справился с задачей. Данный метод сильно усложняется при применении его к исследованию произвольных движений механических систем. Поэтому целесообразно строить приближенное решение (1) таким образом, чтобы не навязывать поведение решения во времени. Одним из возможных подходов является метод прямых.

2. Разобьём счётную область $z \in [0,1]$, $t \geq 0$ на n полос прямыми

$$z = z_i = ih, \qquad i = 0,..,n, \qquad h = 1/n.$$

Аппроксимируем производные по пространственной переменной z конечно-разностными соотношениями

$$\left.\frac{\partial^r X}{\partial z^r}\right|_{z=ih} = \sum_{j=-p}^{q} a_j^r X_{i+j}, \qquad X_{i+j} = X(t, z_{i+j}).$$

Центральная разностная аппроксимация производной $X_i^{(4)}$ $(2 \leq i \leq n-2)$ с $p,q = 2$, коэффициентами

$$a = \left[\frac{1}{h^4}, -4\frac{1}{h^4}, 6\frac{1}{h^4}, -4\frac{1}{h^4}, \frac{1}{h^4}\right]$$

имеет порядок аппроксимации $504h^4 y(\xi,t)$, $z_{i-2} \leq \xi \leq z_{i+2}$.

Построим соответствующие разностные аппроксимации в окрестности границ $z = 0$, $z = 1$, учитывающие граничные условия.

Разностная аппроксимация четвёртой производной по z в точке z_1 имеет вид

$$X_1^{(4)} = \sum_{j=-1}^{5} a_j X_{1+j} + b\frac{\partial X}{\partial z}\bigg|_{z=0}, \qquad (2)$$

где

$$(a,b) = \left[-\frac{43}{5}\frac{1}{h^4}, 14\frac{1}{h^4}, -\frac{13}{2}\frac{1}{h^4}, \frac{4}{9}\frac{1}{h^4}, \frac{1}{h^4}, -\frac{2}{5}\frac{1}{h^4}, \frac{1}{18}\frac{1}{h^4}, -\frac{14}{3}\frac{1}{h^3}\right].$$

Разностная аппроксимация четвёртой производной по z в точке z_{n-1} имеет вид

$$X_{n-1}^{(4)} = \sum_{j=-5}^{1} a_j X_{1+j} + b\frac{\partial X}{\partial z}\bigg|_{z=1}. \qquad (3)$$

Её коэффициенты

$$(a,b) = \left[\frac{1}{18}\frac{1}{h^4}, -\frac{2}{5}\frac{1}{h^4}, \frac{1}{h^4}, \frac{4}{9}\frac{1}{h^4}, -\frac{13}{2}\frac{1}{h^4}, 14\frac{1}{h^4}, -\frac{43}{5}\frac{1}{h^4}, \frac{14}{3}\frac{1}{h^3}\right].$$

Порядок аппроксимации соотношений (2), (3) равен $2184h^4 y(\xi,t)$, для (2) $\xi \in [0,2h]$, а для (3) $\xi \in [1,1-2h]$.

Для аппроксимации вторых и третьих производных от X по z воспользуемся следующими соотношениями.

Граница z=0. Разностная аппроксимация имеет вид

$$\frac{\partial^r X}{\partial z^r}\bigg|_{z=ih} = \sum_{j=0}^{q} a_j^r X_j + b\frac{\partial X}{\partial z}\bigg|_{z=0}.$$

Для аппроксимации второй производной с четвёртым порядком справедлива формула с $q=3$ и коэффициентами

$$(a,b) = \left[-\frac{415}{72}\frac{1}{h^2}, 8\frac{1}{h^2}, -3\frac{1}{h^2}, \frac{8}{9}\frac{1}{h^2}, -\frac{1}{8}\frac{1}{h^2}, -\frac{25}{6}\frac{1}{h}\right].$$

Её погрешность аппроксимации равна $-48h^4 y(t,\xi)$, $\quad \xi \in [0,4h]$.

Граница z=1. Разностная аппроксимация имеет вид

$$\frac{\partial^r X}{\partial z^r}\bigg|_{z=ih} = \sum_{j=-p}^{0} a_j^r X_{n+j} + b\frac{\partial X}{\partial z}\bigg|_{z=1}.$$

Для аппроксимации второй производной с четвёртым порядком получается формула с $p=4$ и коэффициентами

$$(a,b) = \left[-\frac{1}{8}\frac{1}{h^2}, \frac{8}{9}\frac{1}{h^2}, -3\frac{1}{h^2}, 8\frac{1}{h^2}, -\frac{415}{72}\frac{1}{h^2}, \frac{25}{6}\frac{1}{h}\right].$$

Её погрешность аппроксимации равна $-48h^4 y(t,\xi)$, $\quad \xi \in [1-4h,1]$.

Для аппроксимации третьей производной с четвёртым порядком получается формула с $p=5$ и коэффициентами

$$(a,b) = \left[\frac{1}{2}\frac{1}{h^3}, -\frac{61}{16}\frac{1}{h^3}, 13\frac{1}{h^3}, -\frac{107}{4}\frac{1}{h^3}, \frac{77}{2}\frac{1}{h^3}, -\frac{343}{16}\frac{1}{h^3}, \frac{45}{4}\frac{1}{h^2}\right].$$

Её погрешность аппроксимации равна $-1644h^4 y(t,\xi)$, $\quad \xi \in [1-4h,1]$.

В результате подстановки разностных формул в краевую задачу (1) получим задачу Коши для системы ОДУ вида

$$A\ddot{X}_i + B\dot{X}_i = F(z_i, t, X_1, ..., X_{n-1}),$$
$$X_i(0) = f_i, \quad \dot{X}_i = g_i, \ i = 1,2,...n-1. \qquad (4)$$

Эта задача Коши решается любым численным методом для ОДУ.

Система (4) может быть исследована аналитически. Легко определить её особые точки и поведение решения в их окрестности. Это позволяет качественно оценить поведение динамической системы, не ограничиваясь задачами нахождения предельных циклов и периодических решений.

Применение методов теории катастроф [2] к анализу системы (4) позволит получить информацию о характере переходных процессов в механической системе.

Данная методика была реализована программно в системе MatLab и была успешно применена к исследованию динамики упругого манипулятора.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андрейченко К.П., Андрейченко Д.К.* Математическое моделирование динамических систем. Саратов, 2000.

2. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1980.

УДК 519.85

А. С. Дудова

УСЛОВИЯ ЗВЁЗДНОСТИ ЛЕБЕГОВА МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИИ*

1. Давно известное в действительном и комплексном анализе понятие звёздного множества ныне активно используется в рамках абстрактного выпуклого анализа [1]. Напомним, что множество $A \subset R^n$ называется звёздным относительно точки $x^* \in A$, если

$$x^* + \alpha(x - x^*) \in A, \quad \forall x \in A, \ \alpha \in [0,1].$$

Это – широкий класс множеств, включающий в себя выпуклые множества, конусы, объединение выпуклых множеств с непустым пересечением. Операции сложения, умножения на число сохраняют звёздность. Кроме того, если у некоторых звёздных множеств есть общие точки звёздности, то есть относительно которых они являются звёздными, то пересечение и объединение таких множеств также будет звёздным. Это говорит о том, что с та-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).