В результате подстановки разностных формул в краевую задачу (1) получим задачу Коши для системы ОДУ вида

$$A\ddot{X}_i + B\dot{X}_i = F(z_i, t, X_1, ..., X_{n-1}),$$
$$X_i(0) = f_i, \quad \dot{X}_i = g_i, \ i = 1,2,...n-1. \qquad (4)$$

Эта задача Коши решается любым численным методом для ОДУ.

Система (4) может быть исследована аналитически. Легко определить её особые точки и поведение решения в их окрестности. Это позволяет качественно оценить поведение динамической системы, не ограничиваясь задачами нахождения предельных циклов и периодических решений.

Применение методов теории катастроф [2] к анализу системы (4) позволит получить информацию о характере переходных процессов в механической системе.

Данная методика была реализована программно в системе MatLab и была успешно применена к исследованию динамики упругого манипулятора.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Андрейченко К.П., Андрейченко Д.К.* Математическое моделирование динамических систем. Саратов, 2000.

2. *Постон Т., Стюарт И.* Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1980.

УДК 519.85

А. С. Дудова

УСЛОВИЯ ЗВЁЗДНОСТИ ЛЕБЕГОВА МНОЖЕСТВА ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИИ*

1. Давно известное в действительном и комплексном анализе понятие звёздного множества ныне активно используется в рамках абстрактного выпуклого анализа [1]. Напомним, что множество $A \subset R^n$ называется звёздным относительно точки $x^* \in A$, если

$$x^* + \alpha(x - x^*) \in A, \quad \forall x \in A, \ \alpha \in [0,1].$$

Это – широкий класс множеств, включающий в себя выпуклые множества, конусы, объединение выпуклых множеств с непустым пересечением. Операции сложения, умножения на число сохраняют звёздность. Кроме того, если у некоторых звёздных множеств есть общие точки звёздности, то есть относительно которых они являются звёздными, то пересечение и объединение таких множеств также будет звёздным. Это говорит о том, что с та-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

кими множествами можно конструктивно работать и, в частности, рассматривать экстремальные задачи, в которых допустимые множества аргументов являются звёздными.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на R^n и для некоторого фиксированного числа λ её нижнее лебегово множество $G(\lambda)=\{x\in R^n : f(x)\le\lambda\}$ не пусто, а точка $x^*\in G(\lambda)$. Получим условия звёздности множества $G(\lambda)$ относительно точки x^* при дополнительном предположении о дифференцируемости по направлениям функции $f(x)$ в точках множества уровня $C(\lambda)=\{x\in R^n : f(x)=\lambda\}$. Договоримся далее понимать под

$$f'(x,g)=\lim_{\alpha\downarrow 0}\alpha^{-1}[f(x+\alpha g)-f(x)],$$

$$\gamma_f(x)=\{g\in R^n : f'(x,g)<0\},\ \ \gamma_{1,f}(x)=\{g\in R^n : f'(x,g)\le 0\}.$$

2. Необходимое условие звёздности даёт

ТЕОРЕМА 1. Если множество $G(\lambda)$ является звёздным относительно точки $x^*\in G(\lambda)$, то

$$f'(x,x^*-x)\le 0,\ \ \forall x\in C(\lambda). \tag{1}$$

Доказательство. По условию теоремы для любой точки $x\in C(\lambda)$ выполняются соотношения: $f(x)=\lambda,\ \ f(x+\alpha(x^*-x))\le\lambda,\ \ \forall\alpha\in[0,1]$. Отсюда следует неравенство $f(x+\alpha(x^*-x))-f(x)\le 0$, поделив левую и правую части которого на α и выполнив операцию *lim* при $\alpha\downarrow 0$, получим (1). □

Теперь получим достаточные условия звёздности.

ТЕОРЕМА 2. Если точка $x^*\in G(\lambda)$ такова, что для любой точки $x\in C(\lambda)$ выполняется хотя бы одно из условий:

а) $f'(x,x^*-x)<0$,

б) $f'(x,x^*-x)\le 0,\ \ \bar{\gamma}_f(x)=\gamma_{1,f}(x)$,

то множество $G(\lambda)$ является звёздным относительно точки x^*.

Доказательство. 1. Предположим противное, то есть найдётся точка $x_0\in G(\lambda)$ и точка $y\in(x^*,x_0)$, в которой $f(y)>\lambda$. Поскольку функция $f(\cdot)$ является непрерывной, то существует $r>0$ такое, что

$$f(x)>\lambda,\quad \forall x\in B(y,r)=\{x\in R^n : \|x-y\|\le r\}, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|$ – евклидова норма. Нетрудно видеть [2], что функция

$$F(t)=\min_{x\in B(y,r)} f(x+t(x_0-x^*))$$

является непрерывной по $t\in R$. Следовательно, поскольку

$$F\left(\|y - x_0\|/\|x_0 - x^*\|\right) = \min_{x \in B(x_0, r)} f(x) \le \lambda$$

и в силу (2) имеем $F(0) = \min\limits_{x \in B(y,r)} f(x) > \lambda$, то существует $t_0 \in \left(0, \|y - x_0\|/\|x_0 - x^*\|\right)$ такое, что

$$F(t_0) = \lambda, \;\; F(t) > \lambda, \;\; \forall t \in [0, t_0). \tag{3}$$

Обозначим через $y(t_0) \in B(y + t_0(x_0 - x^*), r)$: $F(t_0) = f(y(t_0)) = \lambda$.
Нетрудно показать, что из (3) следует

$$\|y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0)\| = r. \tag{4}$$

2. Теперь докажем, что

$$\left\langle y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0), x^* - y(t_0) \right\rangle > 0. \tag{5}$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - операция скалярного произведения.

Очевидно, что вектора $x_0 - x^*$ и $y + t_0(x_0 - x^*) - x^*$ являются сонаправленными, то есть существует $\alpha > 0$ такое, что

$$x_0 - x^* = \alpha(y + t_0(x_0 - x^*) - x^*.$$

Поэтому, если предположить, что неравенство (5) неверно, то, используя (4), получаем

$$\left\langle x_0 - x^*, y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0) \right\rangle = \alpha \left\langle y + t_0(x_0 - x^*) - x^*, y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0) \right\rangle =$$

$$= \alpha \|y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0)\|^2 - \alpha \left\langle y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0), x^* - y(t_0) \right\rangle > 0. \tag{6}$$

С другой стороны, для точки $c(\varepsilon) = y + (t_0 - \varepsilon)(x_0 - x^*)$ имеем

$$\|c(\varepsilon) - y(t_0)\|^2 = \|y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0)\|^2 - 2\varepsilon \left\langle x_0 - x^*, y + t_0(x_0 - x^*) - y(t_0) \right\rangle +$$

$$+ \varepsilon^2 \|x_0 - x^*\|^2. \tag{7}$$

Из (5), (6) и (7) следует, что при достаточно малых положительных ε выполняется $\|c(\varepsilon) - y(t_0)\| < r$. Отсюда вытекает

$$F(t_0 - \varepsilon) \min_{x \in B(y,r)} f(x + (t_0 - \varepsilon)(x_0 - x^*)) = \min_{x \in B(c(\varepsilon), r)} f(x) \le f(y(t_0)) = \lambda,$$

что противоречит (3). Неравенство (5) доказано.

3. Непосредственно из (4) и (5) следует, что при достаточно малых положительных β выполняется

$$\|y(t_0) + \beta(x^* - y(t_0) - y - t_0(x_0 - x^*)\| < r.$$

Отсюда следует вывод, что найдутся $\beta_0 > 0$ и $\varepsilon > 0$ такие, что

$$y(t_0) + \beta g \in B(y + t_0(x_0 - x^*), r), \;\; \forall \beta \in (0, \beta_0), \;\; g \in B(x^* - y(t_0), \varepsilon). \tag{8}$$

Так как в соответствии с (4) имеем $F(t_0) = \min\limits_{x \in B(y + t_0(x_0 - x^*), r)} f(x) = \lambda$, то в силу (8) получаем

$$f(y(t_0)+\beta g)\geq\lambda,\ \ \forall\beta\in(0,\beta_0),\ \ g\in B(x^*-y(t_0),\varepsilon).$$

Отсюда, если учесть, что $f(y(t_0))=\lambda$, имеем

$$f'(y(t_0),g)\geq 0,\ \ \forall g\in B(x^*-y(t_0),\varepsilon).$$

Теперь легко сделать вывод, что

$$f'(y(t_0),x^*-y(t_0))\geq 0, \bar{\gamma}_f(y(t_0))\neq\gamma_{1,f}(y(t_0)),$$

то есть ни одно из условий теоремы не выполняется. □

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Rubinov A.* Abstract Convexity and Global Optimization. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

2. *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. М.: Наука, 1972.

УДК 517.54

А. М. Захаров, Д. В. Прохоров

СЕДЛОВЫЕ ТОЧКИ МНОЖЕСТВА КОЭФФИЦИЕНТОВ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ*

Пусть S – класс голоморфных однолистных в единичном круге U функций

$$f(z)=z+a_2z^2+...,\quad z\in U. \tag{1}$$

Проблема коэффициентов однолистных функций заключается в исследовании множеств значений систем начальных коэффициентов разложения (1). Настоящая статья посвящена описанию характера седловой точки множества $V_3=\{(\operatorname{Re}a_2,\operatorname{Im}a_2,\operatorname{Re}a_3):f\in S\}$, доставляемой функцией

$$K_2(z)=\frac{z}{1-z^2}=\sum_{n=1}^{\infty}z^{2n-1}\in S.$$

Функция K_2 соответствует точке (0,0,1) на границе множества V_3 [1, с. 205]. Все граничные точки множества V_3 являются граничными точками множества достижимости управляемой системы, порождённой уравнением Левнера [2]. Поэтому они могут быть найдены при помощи процесса оптимизации. Те из граничных точек, которые описываются скользящим оптимальным режимом, выражаются как значение $(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$ решения управляемой системы дифференциальных уравнений [2]

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 01-01-00123) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).