УДК 519.4

С. И. Ишина

ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ *P*-ПЛАНАРНЫХ АВТОМАТАХ*

В статье изучаются алгебраические свойства проективно-планарных (сокращенно *P*-планарных) автоматов. Под *P*-планарным автоматом будем понимать полугрупповой структурированный автомат [1] $A=(X,\Gamma,X',\delta,\eta)$ с множеством состояний X, наделённым структурой проективной плоскости [2] $\Pi=(X,L)$, множеством выходных сигналов X', наделённым структурой проективной плоскости $\Pi'=(X',L')$, полугруппой входных сигналов Γ, функцией переходов δ и функцией выходных сигналов η, удовлетворяющих известным аксиомам полугруппового автомата [1]. При этом для любого $\gamma\in\Gamma$ функция переходов $\delta_\gamma: x\mapsto\delta(x,\gamma)$ $(x\in X)$ является эндоморфизмом проективной плоскости Π, а функция выходных сигналов $\eta_\gamma: x\mapsto\eta(x,\gamma)$ $(x\in X)$ является гомоморфизмом проективной плоскости Π в проективную плоскость Π'. Обозначать такой автомат будем также символом $A=(\Pi,\Gamma,\Pi',\delta,\eta)$.

Важный пример *P*-планарного автомата даёт универсальный *P*-планарный автомат $\mathbf{Atm}(\Pi,\Pi')=(\Pi,\mathrm{End}\Pi\times\mathrm{Hom}(\Pi,\Pi'),\Pi',\delta,\eta)$. Множеством состояний такого автомата является проективная плоскость $\Pi=(X,L)$ с множеством точек X, множеством выходных сигналов – проективная плоскость $\Pi'=(X',L')$ с множеством точек X'. Полугруппой его входных сигналов является полугруппа Γ пар отображений $(\varphi,\psi)\in\mathrm{End}\Pi\times\mathrm{Hom}(\Pi,\Pi')$ с операцией умножения $(\varphi,\psi)\cdot(\varphi_1,\psi_1)=(\varphi_1\circ\varphi,\psi_1\circ\varphi)$. Функция переходов δ и функция выходных сигналов η определяются по формулам: $\delta(x,\gamma)=\varphi(x)$, $\eta(x,\gamma)=\psi(x)$ при любых $x\in X$, $\gamma\in\Gamma$, где $\gamma=(\varphi,\psi)$.

Очевидно, что автомат $\mathbf{Atm}(\Pi,\Pi')$ является *P*-планарным автоматом. Более того, этот автомат является универсальным притягивающим объектом в категории *P*-планарных автоматов с множеством состояний Π и множеством выходных сигналов Π', т.е. обладает следующим универсальным свойством: *для всякого P-планарного автомата* $A=(\Pi,\Gamma,\Pi',\delta,\eta)$ *существует и притом единственный гомоморфизм по входным сигналам* [1] *этого автомата в автомат* $\mathbf{Atm}(\Pi,\Pi')$.

Пусть Γ – полугруппа пар отображений (φ,ψ), где φ – преобразование множества X, а ψ – отображение множества X в множество X'. Тогда Γ определяет на множествах X и X' следующие канонические отношения:

$\lambda_\Gamma=\cup\{\varphi^3|(\varphi,\psi)\in\Gamma$, для некоторого $\psi\}$;

$\chi_\Gamma=\cup\{\psi^3|(\varphi,\psi)\in\Gamma$, для некоторого $\varphi\}$;

$R_\Gamma=\{(x_1,x_2,x_3)\in X^3: X^3/\Delta_{X^3}\subset\lambda_\Gamma^{-1}(x_1,x_2,x_3)\}$;

* Работа выполнена при поддержке INTAS, грант № 99-1224.

$Q_\Gamma = \{(x_1,x_2,x_3)\in X^3 : X^3 \subset \lambda_\Gamma(x_1,x_2,x_3)\}$;
$R'_\Gamma = \{(x_1,x_2,x_3)\in X'^3 : X'^3/\Delta_{X'^3} \subset \chi_\Gamma^{-1}(x_1,x_2,x_3)\}$; $Q'_\Gamma = X'^3 \setminus R'_\Gamma$,
где $\varphi^3(x_1,x_2,x_3)=(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3))$;
$\lambda_\Gamma^{-1} = \cup\{(\varphi^{-1})^3 | (\varphi,\psi)\in\Gamma$, для некоторого $\psi\}$;
$\Delta_{X^3} = \{(x_1,x_2,x_3)\in X^3 : x_i = x_j$, для некоторых $1\le i \ne j \le 3\}$.

Алгебраические системы $M_\Gamma=(X, R_\Gamma)$ и $M'_\Gamma=(X', R'_\Gamma)$ будем называть каноническими релятивами полугруппы Г.

Полугруппу пар отображений Г будем называть 3-ограниченно замкнутой, если она содержит все такие пары отображений (φ,ψ), где φ – преобразование множества X, ψ – отображение множества X в X', что для любого трехэлементного множества $Y\subset X$ выполняются равенства $\varphi|Y=\varphi_1|Y$ и $\psi|Y=\psi_2|Y$ при некоторых $(\varphi_1,\psi_1), (\varphi_2,\psi_2)\in\Gamma$.

Для некоторого тернарного отношения R на множестве X множество $Y\subset X$ называется R-связным, если $Y^3\subset R$.

Тернарное отношение $R\subset X^3$ будем называть эквивалентностью на множестве X, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(T1) $(x,x,x)\in R$ для любого $x\in X$;

(T2) $(x_1,x_2,x_3)\in R \Rightarrow (x_2,x_1,x_3), (x_1, x_3, x_2)\in R$;

(T3) для любых попарно различных элементов $x_1,x_2 \in X$ и любых $x,y \in X$ $(x,x_1,x_2), (x_2,x_1,y)\in R \Rightarrow (x,x_1,y)\in R$.

При этом эквивалентность R называется нетривиальной, если выполняется условие

(T4) $R\ne X^3$,

и квазиуниверсальной, если выполняется условие

(T5) для любых $x_1,x_2 \in X$ найдётся такой элемент $x_3 \in X$, что $(x_1,x_2,x_3)\in R$.

Для произвольной проективной плоскости $\Pi=(X,L)$ определим отношение коллинеарности по следующей формуле:

$B(\Pi)=\{(x_1,x_2,x_3) \in X^3$: точки x_1,x_2,x_3 принадлежат некоторой прямой $l\in L\}$.

ЛЕММА. Пусть $\Pi=(X,L)$ и $\Pi'=(X',L')$ – проективные плоскости и Г – полугруппа входных сигналов универсального P-планарного автомата **Atm**(Π,Π'). Тогда канонические отношения R_Γ и R'_Γ полугруппы Г удовлетворяют следующим условиям:

1) отношения коллинеарности точек $B(\Pi)$ и $B(\Pi')$ совпадают, соответственно, с каноническими отношениями R_Γ и R'_Γ полугруппы Г;

2) отношения R_Γ и R'_Γ являются нетривиальными квазиуниверсальными эквивалентностями на множествах X и X', соответственно;

3) множество $Y\subset X$ в том и только том случае является прямой проективной плоскости П, если оно является максимальным R_Γ-связным множеством;

4) множество $Y' \subset X'$ в том и только том случае является прямой проективной плоскости Π', если оно является максимальным R'_Γ-связным множеством;

5) для любого преобразования φ множества X, условие $\varphi \in \mathrm{End}\Pi$ равносильно тому, что $\varphi^3(R_\Gamma) \subset R_\Gamma$;

6) для любого отображения ψ множества X в множество X', условие $\psi \in \mathrm{Hom}(\Pi,\Pi')$ равносильно тому, что $\psi^3(R'_\Gamma) \subset R'_\Gamma$;

7) для любого преобразования φ множества X, условие $\varphi \in \mathrm{End}\Pi$ равносильно тому, что для всех $Y \subset X$, удовлетворяющих условию $|Y| \leq 3$, найдется $(\varphi_1,\psi_1) \in \Gamma$, для которой выполняется равенство $\varphi | Y = \varphi_1 | Y$;

8) для любого отображения ψ множества X в множество X', условие $\psi \in \mathrm{Hom}(\Pi,\Pi')$ равносильно тому, что для всех $Y \subset X$, удовлетворяющих условию $|Y| \leq 3$, найдется $(\varphi_2,\psi_2) \in \Gamma$, для которой выполняется равенство $\psi | Y = \psi_2 | Y$.

Основной результат статьи посвящён решению задачи конкретной характеризации универсальных P-планарных автоматов.

ТЕОРЕМА. Пусть $A=(X,\Gamma,X',\delta,\eta)$ полугрупповой автомат и Γ рассматривается как полугруппа пар отображений (φ,ψ), где φ – преобразование множества X, ψ – отображение множества X в X'. Тогда A в том и только том случае является универсальным P-планарным автоматом $\mathbf{Atm}(\Pi,\Pi')$ для некоторых проективных плоскостей $\Pi=(X,L)$ и $\Pi'=(X',L')$, если выполняются следующие условия:

1) полугруппа Γ является 3-ограниченно замкнутой;

2) канонические отношения R_Γ и R'_Γ являются нетривиальными квазиуниверсальными эквивалентностями на множествах X и X' соответственно;

3) для любой пары $(\varphi,\psi) \in \Gamma$ и любых $(x_1,x_2,x_3) \in X$ выполняются свойства:

$$(x_1,x_2,x_3) \in R_\Gamma \Rightarrow \varphi^3(x_1,x_2,x_3) \in R_\Gamma,$$
$$(x_1,x_2,x_3) \in R_\Gamma \Rightarrow \psi^3(x_1,x_2,x_3) \in R'_\Gamma.$$

Причём в этом случае существует единственный (с точностью до изоморфизма) универсальный P-планарный автомат с множеством состояний X и множеством выходных сигналов X', для которого полугруппа пар отображений Γ является полугруппой входных сигналов.

Нетривиальной частью доказательства теоремы является проверка достаточности ее условий. Если полугруппа Γ является 3-ограниченно замкнутой и её канонические отношения R_Γ, R'_Γ удовлетворяют условиям 1) – 3), то эти отношения определяют проективные плоскости $\Pi=(X,L)$ и $\Pi'=(X',L')$, множествами прямых которых являются множества всех максимальных R_Γ-связных и R'_Γ-связных множеств соответственно. Чтобы показать, что $\Gamma=\mathrm{End}\Pi \times \mathrm{Hom}(\Pi,\Pi')$, достаточно проверить равенства $\mathrm{End}\Pi=\mathrm{End}M_\Gamma$ и $\mathrm{Hom}(\Pi,\Pi')=\mathrm{Hom}(M_\Gamma,M'_\Gamma)$. Доказательство первого равенства аналогично доказательству теоремы в [3]. Включение $\Gamma \subset \mathrm{Hom}(M_\Gamma, M'_\Gamma)$ следует из условия 8) леммы. Обратное включение доказывается с помощью аксиом проективной плоскости.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Плоткин Б.И., Гринглаз Л.Я., Гварамия А.А.* Элементы алгебраической теории автоматов. М.: Высшая школа, 1994.

2. *Хартсхорн Р.* Основы проективной геометрии. М.: Мир, 1970.

3. *Ишина С.И.* Об универсальных проективно-планарных автоматах // Математика. Механика: Сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2001. Вып. 3. С. 54 – 58.

УДК 515.126.83

А. Б. Коноплев

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИИ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧЕК ДО ОБРАЗОВ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть $X = R^n, Y = R^m, Z = X \times Y$, $F : X \to 2^Y$ – многозначное отображение с замкнутыми образами. Рассмотрим функцию расстояния (ФР) от точек до образов многозначного отображения в произвольной норме

$$d_F(z) = \inf_{v \in F(x)} \|y - v\|, \quad z = (x, y).$$

Введём обозначения $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathrm{dom} F \times Y$, $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in Z$,

$$W(z_0) = \{w \in Y \mid \|y_0 - w\| \le d_F(z_0)\},\ Q(z_0) = W(z_0) \cap F(x_0),$$

$$\Psi_Y = \{\psi : [0, \alpha_0] \to Y \mid \exists \alpha_0 > 0,\ \alpha^{-1}\psi(\alpha) \to 0, \alpha \downarrow 0\},$$

$$L_F(z_0, v, x) = \{y \in Y \mid \exists \alpha_0 > 0, w(\alpha) \in W(z_0), \psi(\alpha) \in \Psi_Y :$$

$$w(\alpha) \to v,\ \alpha \downarrow 0,\ w(\alpha) + \alpha\, y + \psi(\alpha) \in F(x_0 + \alpha\, x),\ \alpha \in [0, \alpha_0]\},$$

$$\tilde{K}(x_0, v, x) = \{y \in Y \mid \exists \alpha_0 > 0,\ \psi(\alpha) \in \Psi_Y :$$

$$v + \alpha\, y + \psi(\alpha) \in F(x_0 + \alpha\, x),\ \alpha \in [0, \alpha_0]\},\ H(\alpha) = \alpha^{-1}[d_F(z_0 + \alpha\, \bar{z}) - d_F(z_0)].$$

Как и в [1], будем считать, что $\inf \varnothing = +\infty$.

Получим оценку сверху для верхней производной Дини ФР.

ТЕОРЕМА 1. Справедливо неравенство

$$d_F^{\uparrow}(z_0, \bar{z}) \equiv \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} H(\alpha) \le \inf_{v \in Q(z_0)} \inf_{\varsigma \in L_F(z_0, v, \bar{x})} \frac{\partial \|y_0 - v\|}{\partial(\bar{y} - \varsigma)}. \tag{1}$$

Доказательство. Если для всех $v \in Q(z_0)$ множество $L_F(z_0, v, \bar{x}) = \varnothing$, то неравенство (1) становится тривиальным. Если же существуют точки $v \in Q(z_0)$, для которых $L_F(z_0, v, \bar{x}) \ne \varnothing$, то внешний инфимум в правой части (1) очевидно достигается именно в этих точках. Возьмём произвольно точку $v \in Q(z_0)$, для которой $L_F(z_0, v, \bar{x}) \ne \varnothing$, и