$$z_0 = (x_0, y_0) = (0,0,1),\ \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) = (1,0,0).$$

Очевидно, данное отображение F замкнуто и равномерно ограничено в каждой точке эффективной области. Нетрудно убедиться, что, $Q(z_0) = \{v = (0,0)\}$, $\dfrac{\partial\|y_0 - v\|}{\partial(\bar{y} - \zeta)} = -\zeta^{(2)}$, $L_F(z_0, v, \bar{x}) = R \times R^-$, $\widetilde{K}(x_0, v, \bar{x}) = \varnothing$, отображение F допускает аппроксимацию первого порядка в точке z_0 по направлению $\bar{x}$ относительно $L_F(z_0, v, \bar{x})$. Подсчёт производной ФР в точке z_0 по направлению $\bar{z}$ по формуле (2) даёт $d'_F(z_0, \bar{z}) = 0$. В то же время подсчёт $d'_F(z_0, \bar{z})$ по формуле (10) даёт неверный результат, так как $\widetilde{K}(x_0, v, \bar{x}) = \varnothing$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Минченко Л.И., Борисенко О.Ф., Грицай С.П.* Многозначный анализ и возмущённые задачи нелинейного программирования. Минск: Навука і тэхніка, 1993.

2. *Дудов С.И.* Дифференцируемость по направлениям функции расстояния // Мат. сб. 1995. Т. 186, № 3, С. 29 – 52.

3. *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. М.: Наука, 1990.

УДК 519.4

В. В. Кривобок

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ *L*-ФУНКЦИИ АРТИНА В ПРОИЗВЕДЕНИЕ *L*-ФУНКЦИЙ ДИРИХЛЕ

Пусть K – нормальное расширение числового поля k степени n и G – группа Галуа этого расширения. Пусть $\{M(g)\}_{g\in G}$ – представление группы G в группу матриц размерности $n \times n$ и χ – характер этого представления

$$\chi(g) = SpM(g), \quad g \in G.$$

L – функция Артина, определяется следующим образом:

$$L(s, \chi, K/k) = \prod_{\wp}\left(1 - \frac{\chi(F(\wp))}{N(\wp)^s}\right)^{-1}, \qquad s = \sigma + it, \tag{1}$$

где произведение берётся по всем неразветвлённым дивизорам поля k и где $F(\wp)$ – автоморфизм Фробениуса дивизора $\wp$.

Известная гипотеза Артина [1] утверждает возможность аналитического продолжения L-функции (1) в случае неглавного характера χ целым образом на комплексную плоскость.

Существенным результатом в направлении решения гипотезы Артина был результат Брауэра [1], который заключается в следующем.

Рассматривается семейство циклических подгрупп $\{H_\alpha\}$ группы G и семейство характеров $\{\chi_{\alpha_j}\}$ этих циклических подгрупп. Брауэр показал, что неабелев характер χ можно разложить в виде линейной комбинации индуцированных характеров $\chi^*_{\alpha_j}$ с целыми коэффициентами. Отсюда сразу следует представление L -функции Артина в следующем виде:

$$L(s,\chi,K/k)=\frac{\prod\limits_i L_i\left(s,\chi_i,K/k_{\alpha_i}\right)^{n_i}}{\prod\limits_j L_j\left(s,\chi_j,K/k_{\alpha_j}\right)^{n_j}}, \tag{2}$$

где χ_i, χ_j – характеры циклических групп $G(K/k_\alpha)$. Из представления (2) следует мероморфность L-функции Артина.

Встает вопрос: можно ли указать такую систему характеров $\{\chi_{\alpha_i}\}$ циклических подгрупп, что неабелев характер χ можно представить в виде

$$\chi=\sum_i n_{\alpha_i}\chi^*_{\alpha_i}, \tag{3}$$

где n_{α_i} – рациональные, положительные числа? Положительный ответ на этот вопрос доказывает гипотезу Артина.

Но, к сожалению, циклических подгрупп группы G явно мало для представления (3) с положительными коэффициентами. Это видно на примере абелевой, бесквадратной группы G, где разложение Брауэра становится совершенно прозрачным. В этом случае на основании разложения Брауэра для L-функции получается следующее представление:

$$L^n(s,\chi,K/k)=\frac{\prod\limits_{H_\alpha\neq\{e\}} L\left(s,\chi_\alpha,K/k_\alpha\right)^{d_\alpha}}{\zeta_K(s)^{m-1}}, \tag{4}$$

где $d_\alpha=\dfrac{[G]}{[H_\alpha]}$, m – число циклических подгрупп группы G.

Таким образом, чтобы, исходя из (4), показать, что $L(s,\chi,K/k)$ – целая функция, необходимо научиться раскладывать функции $L(s,\chi_\alpha,K/k_\alpha)$ в произведение более "мелких" сомножителей и после сокращения получить разложение функции $L(s,\chi,K/k)$ в произведение сомножителей такого рода.

В этом направлении автор доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА. Пусть циклическое расширение $k_\alpha\subset K$ допускает вложение в циклическое круговое расширение $k_\alpha\subset L$. Тогда существует такое круговое расширение поля рациональных чисел $Q\subset M_\alpha$, что имеет место разложение

$$L(s,\chi_\alpha,K/k_\alpha)=\prod_j L_j(s,\chi_{\alpha,j},M_\alpha/Q),$$

где $\chi_{\alpha,j}$ – характеры Дирихле, согласованные с расширением $Q\subset M_\alpha$ и такие, что $\chi_\alpha(\wp)=\chi_{\alpha,j}(N(\wp))$.

Замечание. Есть основания надеяться, что привлечение характеров внешних циклических расширений позволит получить необходимое разложение Брауэра.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Хейльброн X.* ζ-функции и L-функции // Алгебраическая теория чисел / Под ред. Дж. Касселса, А. Фрелиха. М., 1969.

УДК 511.3

В. Н. Кузнецов, Е. В. Сорокина

ПРОДОЛЖИМОСТЬ ЦЕЛЫМ ОБРАЗОМ НА КОМПЛЕКСНУЮ ПЛОСКОСТЬ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ L-РЯДОВ ДИРИХЛЕ ЧИСЛОВЫХ ПОЛЕЙ

Рассмотрим L–ряды Дирихле двух числовых полей k_1 и k_2, отвечающие характерам Дирихле χ_1 и χ_2,

$$L_1(s,\chi_1,k_1)=\sum_{a}\frac{\chi_1(a)}{N(a)^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s},\ s=\sigma+it; \tag{1}$$

$$L_2(s,\chi_2,k_2)=\sum_{\mathcal{B}}\frac{\chi_2(\mathcal{B})}{N(\mathcal{B})^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n^s},\qquad s=\sigma+it. \tag{2}$$

Под скалярным произведением L–рядов Дирихле (1) и (2) здесь понимается следующий ряд:

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n b_n}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{N(a)=N(\mathcal{B})=n}\chi_1(a)\chi_2(\mathcal{B})\right)/n^s.$$

Относительно скалярного произведения двух L–рядов Дирихле авторами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть k_1 и k_2 – абелевы расширения поля $\boldsymbol{Q}$, χ_1 и χ_2 – неглавные характеры Дирихле числовых полей с взаимнопростыми над $\boldsymbol{Q}$ модулями. Тогда скалярное произведение соответствующих L-рядов Дирихле определяет целую функцию.

В основе доказательства теоремы 1 лежит метод редукции к степенным рядам, разработанный в работах [1 – 3], суть которого заключается в том, что многие задачи, связанные с изучением аналитических свойств