носильна существованию в точке $z=1$ радиальных производных любого порядка у соответствующего степенного ряда.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Теория функций и приближений: Тр. 3-й Сарат. зимней шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1988. Ч. 2. С. 113 – 115.

2. *Кузнецов В.Н.* Метод редукции к степенным рядам в задаче о целостности композита рядов Дирихле // Теория функций и приближений: Тр. 4-й Сарат. зимней шк. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1989. Ч. 1. С. 147 – 149.

3. *Кузнецов В.Н.* К задаче описания рядов Дирихле, определяющих целые функции // Дифференциальные уравнения и теория функций: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 1991. Вып. 9. С. 23 – 29.

4. *Кузнецов В.Н., Сорокина Е.В.* К вопросу о целостности композита L -функций числовых полей // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2003. С. 31– 43.

УДК 519.2

И. А. Кузнецова

ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В статье рассматривается задача максимизации функционала

$$H[u_1(\cdot), u_2(\cdot), v_1(\cdot), v_2(\cdot)] =$$
$$= M \min[f_1(\xi_1)u_1(\xi_1) + g_2(\xi_2)v_2(\xi_2), g_1(\xi_1)v_1(\xi_1) + f_2(\xi_2)u_2(\xi_2)]$$

при ограничениях $u_i(\xi_i) + v_i(\xi_i) \le h_i(\xi_i)$, $i=1,2$, где ξ_1, ξ_2 – независимые случайные величины, ξ_i имеет плотность $p_i(\cdot)$, сосредоточенную на отрезке $[a_i, b_i]$, функции $f_i(\cdot), g_i(\cdot), h_i(\cdot)$ положительны и непрерывны, $i=1,2$. Функционал такого типа можно интерпретировать как общее количество продукции двух типов (при соблюдении комплектности), выпускаемой двумя производителями, каждый из которых имеет свою информацию о случайных факторах, характеризующих условия производства. Задачи такого типа относятся к задачам параллельной стохастической оптимизации [1].

Данная вариационная задача сводится к экстремальной задаче максимизации дифференцируемой функции одной переменной на отрезке. Кроме того, указан явный вид оптимальных управлений.

Очевидно, оптимальные управления должны удовлетворять условиям $u_i(\xi_i) + v_i(\xi_i) = h_i(\xi_i)$, $i=1,2$. Учитывая это и сделав замену переменных, можно преобразовать исходную задачу к задаче максимизации функционала

$$H[\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot)] =$$
$$= M \min[F_1(\xi_1)\alpha_1(\xi_1) - G_2(\xi_2)\alpha_2(\xi_2), F_2(\xi_2)\alpha_2(\xi_2) - G_1(\xi_1)\alpha_1(\xi_1)] \quad (1)$$

при ограничениях

$$-t_i^-(\cdot) \le \alpha_i(\cdot) \le t_i^+(\cdot),\ i = 1,2, \qquad (2)$$

где все функции положительны и непрерывны, $F_i(\cdot) + G_i(\cdot) \equiv 1,\ i = 1,2$.

В дальнейшем везде, где встречаются индексы i, j предполагается, что $i = 1,2,\ j = 1,2,\ i \ne j$.

ТЕОРЕМА 1. Управления $\alpha_i(\cdot)$, доставляющие максимум функционалу (1) при ограничениях (2), обладают следующими свойствами:

$$\forall x_j \in [a_j, b_j]\left(P\{\alpha_i(\xi_i) \ge \alpha_j(x_j)\} \ge G_j(x_j) \vee \alpha_j(x_j) = -t_j^-(x_j)\right), \qquad (3)$$

$$\forall x_j \in [a_j, b_j]\left(P\{\alpha_i(\xi_i) \le \alpha_j(x_j)\} \ge F_j(x_j) \vee \alpha_j(x_j) = t_j^+(x_j)\right). \qquad (4)$$

С использованием данных условий оптимальности можно получить следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2. Пусть функции $F_i(\cdot)$, $t_i^+(\cdot)$ являются возрастающими, функции $t_i^-(\cdot)$ – неубывающими, причём при всех $x_i \in [a_i, b_i]$ $F_i(x_i) \ge \frac{1}{2}$. Тогда среди управлений, доставляющих максимум функционалу (1) при ограничениях (2), есть неотрицательные неубывающие.

Замечание. В дальнейшем условия теоремы 2 считаются выполненными, и в качестве $\alpha_i(\cdot)$ рассматриваются только неотрицательные неубывающие функции.

Обозначим функцию распределения случайной величины ξ_i через $H_i(\cdot)$, $i = 1,2$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть система уравнений

$$\begin{cases} H_1(x_1) = F_2(x_2) \\ F_1(x_1) = H_2(x_2) \end{cases} \qquad (5)$$

имеет не более чем конечное число решений. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если от уровня c_1 до уровня c_2 оптимальные управления $\alpha_1(\cdot)$ и $\alpha_2(\cdot)$ непрерывно возрастают, то при всех $c \in [c_1, c_2]$ или $\alpha_1^{-1}(c) = r_1(c)$, или $\alpha_2^{-1}(c) = r_2(c)$, где $r_i(\cdot)$ – функция, обратная $t_i^+(\cdot)$.

2. У оптимальных управлений $\alpha_1(\cdot)$ и $\alpha_2(\cdot)$ может быть не более чем конечное число точек разрыва. Возможные пары точек разрыва функций $\alpha_1(\cdot)$ и $\alpha_2(\cdot)$ удовлетворяют системе (5).

В дальнейшем условия теоремы 3 считаются выполненными.

Пусть $c_0 = \inf\{c : H_i(r_i(c)) > F_j(r_j(c))\}$. Определим для $t_i^+(\alpha_i) \le c \le c_0$ функцию $\gamma_i(c)$ равенством

$$\gamma_i(c) = \begin{cases} r_i(c), \text{ если } H_j(r_j(c)) \le F_i(r_i(c)), \\ F_i^{-1} H_j(r_j(c)), \text{ если } H_j(r_j(c)) > F_i(r_i(c)). \end{cases}$$

При $c < t_i^+(\alpha_i)$ положим $\gamma_i(c) = a_i$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\max\limits_{1 \le i \le 2} t_i^+(\alpha_i) \le c_1 < c_2 < c_0$, $\alpha_1(\cdot)$ и $\alpha_2(\cdot)$ – пара оптимальных управлений. Тогда если при всех $c \in [c_1, c_2]$ $\alpha_j^{-1}(c) = r_j(c)$, то при всех $c \in [c_1, c_2]$ $\alpha_i^{-1}(c) = \gamma_i(c)$.

Пусть $(x_1^1, x_1^2) \ldots (x_1^n, x_1^n)$ – корни системы (5). Построим точки $(\bar{x}_1^k, \bar{x}_2^k)$ следующим образом:

$$x_i^0 = b_i, \bar{x}_1^{k+1} = \max\left(a_i, \max\left(x_i^l : x_i^l < \bar{x}_i^k, Q\left(x_i^l, x_j^l, \bar{x}_i^k, \bar{x}_j^k\right) > 0\right)\right),$$

где $Q\left(x_i', x_j', x_i'', x_j''\right) = H_i\left(x_i'\right) H_j\left(x_j'\right) - H_i\left(x_i''\right) H_j\left(x_j''\right) + \int\limits_{x_i'}^{x_i''} F_i(x_i) p_i(x_i) dx_i +$

$$+ \int\limits_{x_j'}^{x_j''} F_j\left(x_j\right) p_j\left(x_j\right) dx_j .$$

Положим $c_k = \min\limits_{1 \le i \le 2} t_i^+\left(\bar{x}_i^k\right)$ и определим функции $\lambda_i(\cdot)$ равенствами $\lambda_i(x_i) = c_k$ при $\bar{x}_i^k < x_i \le \bar{x}_i^{k-1}$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что система уравнений

$$\begin{cases} H_1(x_1) = F_2(x_2) \\ F_1(x_1) = H_2(x_2) \\ \gamma_1^{-1}(x_1) = \gamma_2^{-1}(x_2) \end{cases} \tag{6}$$

не имеет решений при $a_i \le x_i \le \gamma_i^{-1}(c_0)$. Определим семейства управлений $\left\{\alpha_i^c(\cdot)\right\}_{0 \le c \le c_0}$ следующим образом:

$$\alpha_i^c(x_i) = \begin{cases} \min\left(c, \gamma_i^{-1}(x_i)\right), a_i < x_i \le \zeta_i(c), \\ \lambda_i(x_i), \zeta_i(c) < x_i \le b_i, \end{cases}$$

где $\zeta_i(c) = \min\left\{\bar{x}_i^k : \bar{x}_i^k > \gamma_i(c), \bar{x}_j^k > \gamma_j(c)\right\}$. Тогда оптимальная пара управлений $(\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot))$ принадлежит семейству пар управлений $\left\{\alpha_1^c(\cdot), \alpha_2^c(\cdot)\right\}_{0 \le c \le c_0}$.

Замечание 1. Задача максимизации функционала (1) при ограничениях (2) свелась к задаче максимизации функции одной переменной

$$H(c) = M \min[F_1(\xi_1)\alpha_1^c(\xi_1) - G_2(\xi_2)\alpha_2^c(\xi_2), F_2(\xi_2)\alpha_2^c(\xi_2) - G_1(\xi_1)\alpha_1^c(\xi_1)]$$

на отрезке $[0, c_0]$.

Замечание 2. Если функции $\gamma_i^{-1}(\cdot)$ дифференцируемы, то функция $H(c)$ дифференцируема, и для её производной справедливо равенство

$$H'(c)=\prod_{i=1}^{2}\int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{\zeta_i(c)} p_i(x_i)dx_i - \sum_{i=1}^{2}\int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{\zeta_i(c)} G_i(x_i)p_i(x_i)dx_i +$$
$$+\sum_{i,\,j=1,\,i\neq j}^{2}\int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{\zeta_i(c)} F_i(x_i)p_i(x_i)dx_i \int_{\zeta_i(c)}^{b_j} p_j(x_j)dx_j .$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Radner R.* Teams // Decision and Organisation. C.B. McGure and R. Radner Eds. Amsterdam, 1971.

УДК 517.5

В. П. Курдюмов

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ*

Рассматривается задача нахождения асимптотических формул для собственных функций (с.ф.) и собственных значений (с.зн.) оператора Штурма-Лиувилля

$$L: y''+q(x)y, \quad y(0)=y(1)=0, \quad x\in[0,1],$$

где $q(x)\in L[0,1]$.

В литературе [1, 2] известны асимптотические формулы для с.зн. оператора L с тем большей степенью точности, чем больше предполагаемая гладкость функции $q(x)$.

В настоящей статье использованием классических методов спектральной теории выводятся явные асимптотические формулы для нормированных с.ф. и с.зн. оператора L без дополнительных предположений о гладкости $q(x)$.

Результат, аналогичный полученному в настоящей статье, использованием явного представления решения системы однородных дифференциальных уравнений и операторного подхода В.А. Садовничего получен В.А. Винокуровым и В.А. Садовничим в [3].

Отметим, что метод настоящей статьи может быть применен для нахождения асимптотических формул для с.ф. и с.зн. и для интегро-дифференциальных операторов, например, вида

$$y''+q(x)\int_0^1 p(t)y'(t)dt, \quad y(0)=y(1)=0, \quad x\in[0,1], \text{ где } q(x),p(x)\in L_2[0,1].$$

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).