$$H'(c)=\prod_{i=1}^{2}\int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{\zeta_i(c)} p_i(x_i)dx_i-\sum_{i=1}^{2}\int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{\zeta_i(c)}G_i(x_i)p_i(x_i)dx_i+$$
$$+\sum_{i,\,j=1,\,i\neq j}^{2}\int_{\gamma_i^{-1}(c)}^{\zeta_i(c)}F_i(x_i)p_i(x_i)dx_i\int_{\zeta_i(c)}^{b_j}p_j(x_j)dx_j.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК


1. *Radner R.* Teams // Decision and Organisation. C.B. McGure and R. Radner Eds. Amsterdam, 1971.



УДК 517.5



**В. П. Курдюмов**


# АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ*

Рассматривается задача нахождения асимптотических формул для собственных функций (с.ф.) и собственных значений (с.зн.) оператора Штурма-Лиувилля

$$L:y''+q(x)y,\quad y(0)=y(1)=0,\quad x\in[0,1],$$

где $q(x)\in L[0,1]$.

В литературе [1, 2] известны асимптотические формулы для с.зн. оператора $L$ с тем большей степенью точности, чем больше предполагаемая гладкость функции $q(x)$.

В настоящей статье использованием классических методов спектральной теории выводятся явные асимптотические формулы для нормированных с.ф. и с.зн. оператора $L$ без дополнительных предположений о гладкости $q(x)$.

Результат, аналогичный полученному в настоящей статье, использованием явного представления решения системы однородных дифференциальных уравнений и операторного подхода В.А. Садовничего получен В.А. Винокуровым и В.А. Садовничим в [3].

Отметим, что метод настоящей статьи может быть применен для нахождения асимптотических формул для с.ф. и с.зн. и для интегро-дифференциальных операторов, например, вида

$$y''+q(x)\int_0^1 p(t)y'(t)dt,\quad y(0)=y(1)=0,\quad x\in[0,1],\text{ где } q(x),p(x)\in L_2[0,1].$$


* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00169) и гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).

Введём невозмущенный оператор $L_0 : y''$, $y(0) = y(1) = 0$, $x \in [0,1]$, с.ф. и с.зн. которого имеют вид $e_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x$, $\lambda_n = -(n\pi)^2$, $n = 1,2,\ldots$. Пусть $S = \{\rho : \operatorname{Im}\rho \geq -1\}$, $\gamma_n$ – круговые контуры единичного радиуса с центрами в точках $\rho_n = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $S_1$ – область, полученная из области $S$ удалением кружков, ограниченных контурами $\gamma_n$. Пусть $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$ – резольвента оператора $L$ и $R_{0,\lambda}$ – резольвента оператора $L_0$.

ЛЕММА 1. Для ядра $G_0(x,t,\lambda)$ резольвенты $R_{0,\lambda}$ в области $S_1$ справедлива оценка

$$|G_0(x,t,\lambda)| \leq \frac{C_1}{|\rho|}.$$

ЛЕММА 2. В области $S_1$ при $|\rho| > C_1 \| q \|$ $R_\lambda$ существует и справедлива формула

$$R_\lambda f = R_{0,\lambda} f + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (R_{0,\lambda} q)^k R_{0,\lambda} f, \tag{1}$$

где $q$ – оператор умножения на $q(x)$, $\| q \|$ – норма в $L[0,1]$ и ряд в (1) сходится равномерно по $x \in [0,1]$.

Обозначим через $G(x,t,\lambda)$ ядро $R_\lambda$ и через $G_k(x,t,\lambda)$ – ядро оператора $(-1)^k (R_{0,\lambda} q)^k R_{0,\lambda}$, $k = 1,2\ldots$

Из леммы 2 следует, что в области $S_1$ при $|\rho| > C_1 \| q \|$

$$G(x,t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(x,t,\lambda), \tag{2}$$

и ряд (2) сходится равномерно по $x,t \in [0,1]$.

Обозначим через $\Gamma_n$ образы контуров $\gamma_n$ при отображении $\lambda = -\rho^2$ и через $\widetilde{S}_1$ – область, полученную из $\lambda$-плоскости удалением окрестностей, ограниченных $\Gamma_n$.

ЛЕММА 3. В области $\widetilde{S}_1$ справедливы формулы

$$G_0(x,t,\lambda) = -\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{e_\mu(x) e_\mu(t)}{\lambda - \lambda_\mu}, \quad G_1(x,t,\lambda) = -\sum_{\mu_1,\mu_2=1}^{\infty} \frac{e_{\mu_1}(x) e_{\mu_2}(t)[\mu_1,\mu_2]}{(\lambda - \lambda_{\mu_1})(\lambda - \lambda_{\mu_2})},$$

$$G_2(x,t,\lambda) = -\sum_{\mu_1,\mu_2,\mu_3=1}^{\infty} \frac{e_{\mu_1}(x) e_{\mu_2}(t)[\mu_1,\mu_3][\mu_2,\mu_3]}{\prod_{r=1}^{3}(\lambda - \lambda_{\mu_r})},$$

$$G_3(x,t,\lambda) = -\sum_{\mu_1,\ldots,\mu_4=1}^{\infty} \frac{e_{\mu_1}(x) e_{\mu_2}(t)[\mu_1,\mu_4][\mu_3,\mu_4][\mu_2,\mu_3]}{\prod_{r=1}^{4}(\lambda - \lambda_{\mu_r})},$$

$$G_k(x,t,\lambda) = -\sum_{\mu_1,\dots,\mu_{k+1}=1}^{\infty} \frac{e_{\mu_1}(x)e_{\mu_2}(t)[\mu_1,\mu_{k+1}][\mu_3,\mu_{k+1}]\prod_{r=1}^{k-1}[\mu_r,\mu_{r+1}]}{\prod_{r=1}^{k+1}(\lambda-\lambda_{\mu_r})}, \; k=4,5,\dots$$

Здесь $[\mu_i,\mu_j] = \int_0^1 e_{\mu_i}(t)e_{\mu_j}(t)q(t)dt$ и все ряды сходятся равномерно по $x,t \in [0,1]$, $\lambda \in \widetilde{S}_1$.

ЛЕММА 4. Пусть $\widetilde{\varphi}_n(x)$ – с.ф. оператора $L$, соответствующая с. зн. $v_n$, $\psi_n(x)$ – с.ф. оператора, сопряжённого к $L$, соответствующая с.зн. $\overline{v}_n$,

$$\varphi_n(x) = \frac{\widetilde{\varphi}_n(x)(e_n,\psi_n)}{(\widetilde{\varphi}_n,\psi_n)}, \; (f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

$$g_k(x,n) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1\int_{\Gamma_n} G_k(x,t,\lambda)d\lambda e_n(t)dt.$$

Тогда при $n > \pi^{-1}\left(2\pi C_1^2\|q\| + C_1\|q\| + 1\right)$ и произвольном $m = 1,2,\dots$ справедливо неравенство

$$\left|\varphi_n(x) - e_n(x) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x,n)\right| \le \sum_{k=m+1}^{\infty}|g_k(x,n)|.$$

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha(n) = 4 + \ln(n-1)$ и $a = \frac{8}{\pi^2}$, тогда при $n$, удовлетворяющих неравенствам $n \ge 2a\alpha(n)\|q\|+1$, $\ln(n-1) \ge C_1 + \pi C_1^2$ и произвольном $m = 1,2,\dots$ справедливы оценки

$$\left|\varphi_n(x) - e_n(x) + \sum_{k=1}^{m} g_k(x,n)\right| \le n^{-m-1}2\sqrt{2}a^{m+1}\alpha^{m+1}(n)\|q\|^{m+1},$$

$$|g_m(x,n)| \le n^{-m}\sqrt{2}a^m\alpha^m(n)\|q\|^m,$$

$$\left|v_n + (n\pi)^2 - \frac{[n,n] - \sum_{k=1}^{m}(q(x)g_k(x,n),e_n(x))}{1 - \sum_{k=2}^{m+1}(g_k(x,n),e_n(x))}\right| \le n^{-m-1}4a^{m+1}\alpha^{m+1}(n)(1+\|q\|)^{m+1},$$

$$\left|\frac{(q(x)g_m(x,n),e_n(x))}{1 - \sum_{k=2}^{m+1}(g_k(x,n),e_n(x))}\right| \le n^{-m}4a^m\alpha^m(n)\|q\|^{m+1}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.

2. *Марченко В.А.* Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, 1977.

3. *Винокуров В.А., Садовничий В.А.* // ДАН. 1998. Т. 358, № 3. С. 298 – 301.

УДК 517.5

**А. Л. Лукашов**

## ОБ ИНФОРМАЦИОННОЙ ЭНТРОПИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ НА НЕСКОЛЬКИХ ОТРЕЗКАХ*

Известно [1], что информационная энтропия Больцмана-Шеннона квантовомеханических систем может быть в ряде случаев выражена в терминах информационной энтропии классических ортогональных многочленов. Дадим

Определение. Информационной энтропией многочленов $q_n(x)$, ортонормальных по отношению к весу $\rho(x)$, называется величина

$$S_n = -\int q_n^2(x)\ln q_n^2(x)\rho(x)dx.$$

В настоящее время появилось много работ, в которых изучаются асимптотики этих величин на конечном или бесконечном интервале [2,3], но лишь в нескольких случаях (для многочленов Чебышева первого и второго рода [1]) найдены точные значения этих величин. Приведем один такой результат.

ТЕОРЕМА 1. [1]. Если $q_n(x)$ – ортогональные многочлены Чебышева первого рода (относительно веса $\rho(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$), то при $n\geq 1$

$$S_n = \pi(\ln 2 - 1). \qquad (1)$$

Заметим, что вес $\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ совпадает с плотностью равновесной меры отрезка $[-1;\ 1]$ [4]. Кроме того, нам не встретилось ни одной работы, посвященной вычислению информационных энтропий для многочленов, ортонормированных на несвязных множествах.

Цель данной статьи – сообщить о довольно любопытном обобщении теоремы 1 на случай нескольких отрезков. Ортогональным многочленам на нескольких отрезках посвящено большое количество работ (см., напр., об-

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ на поддержку ведущих научных школ на выполнение научных исследований (проект НШ-1295.2003.1).